

Andreas Lamers

DIE OPTIMIERUNG VON FOLGETEST-
VERFAHREN FÜR ANWENDUNGEN
IM PRÜFUNGSWESEN
EIN ÜBERBLICK ÜBER EINIGE
NEUERE ENTWICKLUNGEN

1980

1981



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555410_0007

DIE OPTIMIERUNG VON FOLGETESTVERFAHREN
FÜR ANWENDUNGEN IM PRÜFUNGSWESEN -
EIN ÜBERBLICK ÜBER EINIGE NEUERE ENTWICKLUNGEN

I n a u g u r a l d i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch den
Fachbereich Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Dipl.-Kfm. Andreas Lamers
aus Kirchhellen

1981



Erster Berichterstatter:	Prof. Dr. J. Bleymüller
Zweiter Berichterstatter:	Prof. Dr. H. Gülicher
Dekan:	Prof. Dr. R. Thoss
Tag der mündlichen Prüfung:	7. Mai 1980

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Verzeichnis der Tabellen	VI
Verzeichnis der Abbildungen	VIII
Verzeichnis der wichtigsten Symbole	XII
Abkürzungsverzeichnis	XVI
1 Einführung	1
2 Grundlagen der Anwendung statistischer Testverfahren im Prüfungswesen	7
2.1 Vorbemerkung	7
2.2 Merkmale statistischer Annahme- stichprobenverfahren	9
2.3 Gestaltung eines statistischen Tests	17
2.4 Einfache Annahmestichproben	31
2.5 Möglichkeiten zu einer effektiveren Stichprobenauswertung	46
2.5.1 Vorbemerkung	46
2.5.2 Abgebrochene Stichprobenent- nahme (Curtailed Sampling)	48
2.5.3 Doppelstichprobenprüfung (Double Sampling)	59
2.6 Zusammenfassung und Ergebnis	76
3 Folgetestverfahren nach Abraham WALD	79
3.1 Vorbemerkung	79
3.2 Allgemeine Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach WALD	81
3.3 Entscheidungsbereiche bei dem Folgetestverfahren	90
3.3.1 Vorbemerkung	90
3.3.2 Entscheidungsbereiche im Modell der Binomialverteilung	91
3.3.3 Entscheidungsbereiche im Modell der Hypergeometrischen Verteilung	107

	Seite
3.4 Technik der Testdurchführung und -auswertung beim Folgetestverfahren nach WALD	127
3.5 Theorie zum Folgetestverfahren nach WALD	146
3.5.1 Vorbemerkung	146
3.5.2 OC-Funktion des Folgetest- verfahrens nach WALD	147
3.5.3 ASN-Funktion des Folgetest- verfahrens nach WALD	169
3.6 Zusammenfassung und Ergebnis	181
4 Weiterentwicklungen der Theorie zum Folgetestverfahren	187
4.1 Vorbemerkung	187
4.2 Abschätzung der Eigenschaften eines Folgetests durch Simulation	190
4.2.1 Vorbemerkung	190
4.2.2 Aufgabenstellung einer Simulation von Folgetests	192
4.2.3 Entwurf und Auslegung eines Simulationsexperimentes	200
4.2.4 Darstellung und Diskussion der Simulationsergebnisse	214
4.2.5 Zusammenfassung und Ausblick	227
4.3 Rekursive Berechnung der Kenngrößen eines Folgetests	231
4.3.1 Vorbemerkung	231
4.3.2 Grundlagen des Rekursions- verfahrens	235
4.3.3 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse	242
4.3.4 Bestimmung eines "optimal" ange- paßten Folgetests mit Hilfe des Rekursionsverfahrens	250
4.3.5 Zusammenfassung und Ausblick	262

	Seite
4.4 Berechnung der Kenngrößen eines Folgetests mit Hilfe absorbierender Markov-Ketten	266
4.4.1 Vorbemerkung	266
4.4.2 Darstellung eines Folgetests durch eine Markov-Kette	269
4.4.3 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse	296
4.4.4 Zusammenfassung und Ausblick	301
4.5 Ergebnis und Prognose der weiteren Entwicklung	303
5 Bestimmung geeigneter Tests aus Stichprobensystemen	308
5.1 Vorbemerkung	308
5.2 Stichprobensysteme der statistischen Qualitätskontrolle	310
5.3 Entwurf eines Stichprobensystems für Prüfungszwecke	315
6 Schlußbetrachtung	319
Anhang	322
A 1: Tabelle der Funktion $E_R(d/n;\theta)$	323
A 2: Programm zur rekursiven Berechnung der Kenngrößen eines Folgetests	329
Literaturverzeichnis	331

Verzeichnis der Tabellen

	Seite
Tab. 2.1 : Fehler beim Testen von Hypothesen	11
Tab. 2.2 : Zulässige Einfachtests zu ausgewählten Beispielen im Poissonmodell	41
Tab. 2.3 : Optimale Einfachtests bei Annahme einer Poisson- bzw. einer Binomialverteilung	44
Tab. 2.4 : Ausgewählte Werte der OC- und ASN-Funktion von Einfachtests bei abgebrochener Kontrolle	56
Tab. 3.1 : Kritische Werte der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach WALD für ausgewählte Beispiele	88
Tab. 3.2 : Koeffizienten der Annahme- und Rückweisegeraden des Folgetestverfahrens nach WALD für ausgewählte Beispiele (Binomialmodell)	97
Tab. 3.3 : Mindeststichprobenumfänge von Folgetests zu ausgewählten Beispielen zur Annahme bzw. Rückweisung der Nullhypothese (Binomialmodell)	99
Tab. 3.4 : Koeffizienten der Annahme- und Rückweisekenngeraden des Folgetestverfahrens nach WALD für ausgewählte Beispiele (Binomialmodell)	102
Tab. 3.5 : Koeffizienten der Annahme- und Rückweisegeraden des Folgetestverfahrens nach WALD für ausgewählte Beispiele (Poissonmodell)	106
Tab. 3.6 : Annahme- und Rückweisekennzahlen von Folgetests zu ausgewählten Beispielen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung	122
Tab. 3.7 : Annahme- und Rückweisezahlen sowie Annahme- und Rückweisekennzahlen von Folgetests bei Einzel- und Gruppenentnahme (Binomial- bzw. Hypergeometrische Verteilung)	135
Tab. 3.8 : Mindeststichprobenumfänge von Folgetests zu ausgewählten Beispielen bei Entnahme der Elemente in Gruppen (Binomialmodell)	136
Tab. 3.9 : Koeffizienten der Annahme- und Rückweisekenngeraden zu ausgewählten Beispielen bei konservativer Lösung	138

	Seite
Tab. 3.10: Auszug aus einer Tabelle der Annahme- und Rückweisekennzahlen von Folgetests im Modell der Binomialverteilung ($\theta_0=0,01$; $\theta_A=0,05$)	139
Tab. 3.11: Tabelle der Annahme- und Rückweisekennzahlen von Folgetests im Modell der Hypergeometrischen Verteilung ($N=1000$; $\theta_0=0,01$; $\theta_A=0,05$)	139
Tab. 3.12: Fünf Punkte der OC-Funktion eines Folgetests	155
Tab. 3.13: Punkte der OC-Funktionen zu ausgewählten Beispielen	158
Tab. 3.14: Fünf Punkte der ASN-Funktion eines Folgetests	174
Tab. 3.15: Punkte der ASN-Funktionen zu ausgewählten Beispielen	175
Tab. 4.1 : Entscheidungskennzahlen eines geschlossenen Folgetests bei Einzel- oder Gruppenauswertung	211
Tab. 4.2 : Simulation eines geschlossenen Folgetests bei Einzel- oder Gruppenauswertung	212
Tab. 4.3 : Auszug aus den Ergebnissen der Simulationsversuche zu Beispiel (1)	215
Tab. 4.4 : Ergebnisse von je 1000 Simulationsversuchen zu ausgewählten Folgetests mit Einzelauswertung bzw. Gruppenauswertung	217
Tab. 4.5 : Ergebnisse der rekursiven Berechnung der Kenngrößen von Folgetests zu ausgewählten Beispielen mit Einzelauswertung	243
Tab. 4.6 : Zulässige Abbruchregeln von Folgetests zu ausgewählten Beispielen	255
Tab. 4.7 : Ergebnisse der rekursiven Berechnung der Kenngrößen von "optimal angepaßten" Folgetests	259
Tab. 4.8 : Werte der OC- und ASN-Funktionen offener Folgetests zu ausgewählten Beispielen	297

Verzeichnis der Abbildungen

	Seite
Abb. 2.1 : OC-Funktion einer Annahmestichprobe	14
Abb. 2.2 : Typischer Verlauf einer ASN-Funktion	17
Abb. 2.3 : OC-Funktionen zweier Tests mit gleicher relativer Neigung (Steilheit)	23
Abb. 2.4 : Beispiel einer a-priori-Verteilung des Fehleranteils ("Fertigungsfunktion")	30
Abb. 2.5 : Entscheidungsregel und mögliche Zufallswege einer einfachen Annahmestichprobe	32
Abb. 2.6 : OC-Funktion des Einfachtests $E(250;5)$ für verschiedene Verteilungsannahmen ($N=1000$)	37
Abb. 2.7 : Zulässige und optimale Einfachtests zu ausgewählten Beispielen im Poissonmodell	42
Abb. 2.8 : OC-Funktion verschiedener optimaler Einfachtests im Poissonmodell	43
Abb. 2.9 : Entscheidungsregel und mögliche Zufallswege einer abgebrochenen einfachen Annahmestichprobe	48
Abb. 2.10: OC-Funktionen und ASN-Funktionen der Einfachtests $E(190;4)$ und $E(250;5)$ bei abgebrochener Kontrolle	57
Abb. 2.11: Stichprobenvorschrift und mögliche Zufallswege einer Doppelstichprobenprüfung ("Schirmdiagramm")	61
Abb. 2.12: Stichprobenvorschrift und mögliche Zufallswege einer abgebrochenen Doppelstichprobe	65
Abb. 2.13: OC-Funktionen ausgewählter Doppeltests	74
Abb. 2.14: ASN-Funktionen ausgewählter Doppeltests bei unterschiedlichen Abbruchmöglichkeiten	75
Abb. 2.15: Vergleich der ASN-Funktionen entsprechender Einfach- und Doppeltests bei abgebrochener Entnahme	76

	Seite
Abb. 3.1 : Allgemeine Entscheidungsregel eines Folgetests nach WALD in logarithmischer Form	84
Abb. 3.2 : Entscheidungsregel ("Entscheidungsregel 2") und mögliche Zufallswege eines Folgetests im Binomialmodell	95
Abb. 3.3 : Entscheidungsregel ("Entscheidungsregel 3") und mögliche Zufallswege eines Folgetests (Binomialmodell)	102
Abb. 3.4 : Bestimmung der Annahme- und Rückweisezahlen beim Folgetestverfahren	110
Abb. 3.5 : Bestimmung der Annahme- und Rückweise- <u>kenn</u> zahlen beim Folgetestverfahren	111
Abb. 3.6 : Entscheidungsbereiche von Folgetests zu ausgewählten Beispielen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung	112
Abb. 3.7 : Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege zu ausgewählten Beispielen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung	123
Abb. 3.8 : Annahme- und Rückweisezahlen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung	125
Abb. 3.9 : Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei einem Folgetest mit Gruppenauswertung	131
Abb. 3.10: Entscheidungsbereiche von Folgetests bei alternativen Gruppenumfängen im Modell der Binomial- bzw. der Hypergeometrischen Verteilung	133
Abb. 3.11: Annahme- und Rückweisebereiche von Folgetests im Modell der Binomial- und der Hypergeometrischen Verteilung ($\theta_0=0,01$; $\theta_A=0,05$; $N=1000$)	141
Abb. 3.12: Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei "konventioneller" Abbruchregel eines Folgetests	144
Abb. 3.13: Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei "optimierter" Abbruchregel eines Folgetests	144
Abb. 3.14: OC-Funktionen $OC(\theta)$ und die entsprechenden Hilfsfunktionen $h(\theta)$ bzw. $g(\theta)$ zu ausgewählten Beispielen	159

	Seite
Abb. 3.15: Tatsächliche Bereichsgrenzen und "gedachte" Bereichsgrenzen zur Herleitung von Grenzen für die OC-Funktion	164
Abb. 3.16: Grenzen für die OC-Funktion eines Folgetests	166
Abb. 3.17: ASN-Funktionen von Folgetests zu ausgewählten Beispielen	175
Abb. 3.18: Näherungen und Obergrenzen für die ASN-Funktionen von Folgetests sowie ASN-Funktionen von Einfach- und Doppeltests zu ausgewählten Beispielen	179
Abb. 4.1 : Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei der Simulation eines Folgetests	204
Abb. 4.2 : Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei der Simulation eines Folgetests mit Gruppenauswertung	207
Abb. 4.3 : Mögliche Zufallswege bei der Simulation eines Folgetests mit Abbruchregel	208
Abb. 4.4 : Auszug aus den Ergebnissen der Simulationsversuche zu Beispiel (1)	216
Abb. 4.5 : Schätzwerte und Näherungen für die OC-Funktionen ausgewählter Folgetests bei Einzelauswertung	219
Abb. 4.6 : Schätzwerte und Näherungen für die OC-Funktionen ausgewählter Folgetests (Auswertung in Gruppen)	219
Abb. 4.7 : Schätzwerte und Näherungen für die ASN-Funktionen ausgewählter Folgetests bei Einzelauswertung sowie ASN-Funktionen entsprechender Doppeltests	221
Abb. 4.8 : Schätzwerte und Näherungen für die ASN-Funktionen ausgewählter Folgetests (Auswertung in Gruppen) sowie ASN-Funktionen entsprechender Doppeltests	221
Abb. 4.9 : Schätzwerte der Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ des Folgetests zu Beispiel (1)	224
Abb. 4.10: Schätzwerte der Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ des Folgetests zu Beispiel (2)	225

	Seite
Abb. 4.11: Beispiele zur rekursiven Berechnung von Wahrscheinlichkeiten $W(x;y)$ beim Folgetest	236
Abb. 4.12: OC- und ASN-Funktionen ausgewählter Folge- tests	245
Abb. 4.13: VSN-Funktionen und Standardabweichungen des entscheidungsnotwendigen Stichproben- umfangs ausgewählter Folgetests	245
Abb. 4.14: Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ zu Beispiel (1)	247
Abb. 4.15: Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ zu Beispiel (2)	248
Abb. 4.16: Vertrauensgrenzen des entscheidungsnot- wendigen Stichprobenumfangs zu ausgewähl- ten Folgetests ($1 - \gamma = 0,95$)	249
Abb. 4.17: Zulässige und optimale Abbruchregeln von Folgetests zu ausgewählten Beispielen	256
Abb. 4.18: Entscheidungsbereiche von Folgetests mit optimaler Abbruchregel zu ausgewählten Beispielen	258
Abb. 4.19: ASN-Funktionen von "optimal angepassten" Folgetests sowie ASN-Funktionen abgebro- chener Einfach- und Doppeltests zu ausge- wählten Beispielen	260
Abb. 4.20: Einteilung der Entscheidungsbereiche eines Folgetests in Segmente	270
Abb. 4.21: Zustände einer Markov-Kette bei einem Folgetest mit Auswertung in Gruppen (ohne Abbruch)	271
Abb. 4.22: Zustände einer Markov-Kette bei einem Folgetest mit Auswertung in Gruppen (mit vorzeitigem Abbruch)	285
Abb. 4.23: Zustände einer Markov-Kette bei einem Folgetest mit Einzelauswertung	293
Abb. 4.24: OC-Funktionen ausgewählter offener Folge- tests bei Einzel- und Gruppenauswertung	298
Abb. 4.25: ASN-Funktionen ausgewählter offener Folge- tests bei Einzel- und Gruppenauswertung	298

Verzeichnis der wichtigsten Symbole

A	Rückweisegrenze der allgemeinen Entscheidungsregel beim Folgetest
$a(x)$	Annahmekennzahl eines Folgetests
α	zulässige Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art
$\tilde{\alpha}$	Näherung für α bei konservativer Lösung
ASN(θ)	ASN-Funktion (Funktion des durchschnittlichen Stichprobenumfangs; average sample number)
$\hat{ASN}(\theta)$	Schätzwert für ASN(θ)
$\bar{ASN}(\theta)$	Näherungslösung für ASN(θ)
B	Annahmegrenze der allgemeinen Entscheidungsregel beim Folgetest
β	zulässige Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art
$\tilde{\beta}$	Näherung für β bei konservativer Lösung
c	Annahmezahl (beim Einfachtestverfahren)
c_1	Annahmezahl der ersten Teilstichprobe beim Doppeltestverfahren
c_2	Annahmezahl der kombinierten Stichproben beim Doppeltestverfahren
$c(y)$	Annahmezahl beim Folgetest zum Stichprobenumfang y
$c^*(n_0)$	Abbruchkriterium beim Folgetest
c	Spaltenvektor, dessen Elemente alle den Wert 1 besitzen
d	Rückweisezahl (beim Einfachtestverfahren)
d_1	Rückweisezahl der ersten Teilstichprobe beim Doppeltestverfahren
d_2	Rückweisezahl der kombinierten Stichproben beim Doppeltestverfahren
$d(y)$	Rückweisezahl beim Folgetest zum Stichprobenumfang y
$D(n_1; n_2; c_1; c_2; d_1)$	Doppeltest mit den Parametern n_1 , n_2 , c_1 , c_2 und d_1
d', d''	Spaltenvektoren, deren Elemente die durchschnittliche Zahl der Elemente bis zur Absorption innerhalb eines Intervalls von n_d Elementen enthalten
$E(n; c)$	Einfachtest mit dem Stichprobenumfang n und der Annahmezahl c
$E(Y/\theta)$	Erwartungswert von Y unter der Bedingung θ

$E_R(d/n;\theta)$	Funktion des durchschnittlichen Stichprobenumfangs bei Erreichen der Rückweisegrenze beim "semi curtailed sampling" (abgebrochene Stichprobenauswertung)
E	Einheitsmatrix
e	Spaltenvektor, dessen Elemente alle den Wert n_d besitzen
f_1	Abszissenabschnitt der Annahmekenngrade beim Folgetest
f_2	Abszissenabschnitt der Rückweiskenngrade beim Folgetest
$f(x_j/\theta_0)$, $f(x_j/\theta_A)$	Wahrscheinlichkeit für x_j Fehler bei der j-ten Entnahme bei j Gültigkeit der Null- bzw. der Alternativhypothese
$F(y/\theta)$	Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs Y unter der Bedingung θ
$f_A(y)$	Wahrscheinlichkeit für Annahme der Nullhypothese genau beim Stichprobenumfang y
$f_R(y)$	Wahrscheinlichkeit für Rückweisung der Nullhypothese genau beim Stichprobenumfang y
$f_W(y)$	Weiterprüfungswahrscheinlichkeit beim Stichprobenumfang y
$F_B(x/n;\theta)$, $f_B(x/n;\theta)$	Verteilungs- und Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung
$F_H(x/N;n;M)$	Verteilungsfunktion der Hypergeometrischen Verteilung
$F_{NB}(y/d;\theta)$, $f_{NB}(y/d;\theta)$	Verteilungs- und Wahrscheinlichkeitsfunktion der Negativen Binomialverteilung
$F_P(x/\mu)$	Verteilungsfunktion der Poissonverteilung
$g(\theta)$	Hilfsfunktion zur Berechnung der OC-Funktion nach der Methode der SRG
G_1 , G_2	Konstanten, die zur Berechnung von Werten der OC-Funktion verwendet werden
g_1 , g_2	Konstanten, die zur Berechnung der Koeffizienten der Bereichsgrenzen eines Folgetests verwendet werden
γ	Sicherheitswahrscheinlichkeit bei Intervallschätzungen
$h(\theta)$	Hilfsfunktion zur Berechnung von Werten der OC-Funktion eines Folgetests nach der Methode von WALD
h	Spaltenvektor, der die den verschiedenen absorbierenden Zuständen entsprechenden Stichprobenumfänge innerhalb eines Intervalls angibt
H_0 , H_A	Nullhypothese bzw. Alternativhypothese

h_1	Ordinatenabschnitt der Annahmegeraden beim Folgetest
h_2	Ordinatenabschnitt der Rückweisegeraden beim Folgetest
$L(x;y)$	Prüfgröße der allgemeinen Entscheidungsregel beim Folgetestverfahren
$l(x;y)$	logarithmierte Prüfgröße ($\ln L(x;y)$)
M	Anzahl fehlerhafter Elemente in einem Prüfungsfeld (in der Grundgesamtheit)
m	Zahl der Simulationsversuche
m	Zeilenvektor der Länge r , der die durchschnittliche Zahl von Durchläufen durch die nicht absorbierenden Zustände einer Markov-Kette angibt
N	Umfang eines Prüfungsfeldes (einer Grundgesamtheit)
n	Stichprobenumfang (beim Einfachtestverfahren)
n_d	Gruppenumfang beim Folgetest mit Gruppenauswertung bzw. Intervallbreite bei einer Markov-Kette
$\hat{n}_1$	Umfang der ersten Teilstichprobe beim Doppeltestverfahren
n_2	Umfang der zweiten Teilstichprobe beim Doppeltestverfahren
n_0	Abbruchgrenze beim Folgetest
$OC(\theta)$	Operationscharakteristik (Annahmekennlinie)
$\hat{OC}(\theta)$	Schätzwert für $OC(\theta)$
$\tilde{OC}(\theta)$	Näherungslösung für $OC(\theta)$
P	Fehleranteil in der Stichprobe (Zufallsvariable)
p	Ausprägung der Zufallsvariablen P
p	Spaltenvektor der Länge r , der die Wahrscheinlichkeiten für Erreichung der Annahmegrenze angibt
q	Anteil der Simulationsversuche, die mit einer Annahme der Nullhypothese enden
Q	Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten von nicht absorbierenden zu nicht absorbierenden Zuständen
r	Anzahl nicht absorbierender Zustände einer Markov-Kette
R	Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten von nicht absorbierenden zu absorbierenden Zuständen
$r(x)$	Rückweisekennzahl eines Folgetests
s	Steigung der Annahme- und Rückweisegeraden beim Folgetest
s	Spaltenvektor, dessen erstes Element den Wert 1 und dessen übrige Elemente den Wert Null besitzen
s_k	Steigung der Annahme- und Rückweisekenngeraden beim Folgetest ($s_k = 1/s$)

T	Anzahl der Perioden bis zur Absorption (Zufallsvariable)
t	konkrete Ausprägung der Zufallsvariablen T
θ	Fehleranteil im Prüfungsfeld (in der Grundgesamtheit)
θ_0, θ_A	Fehleranteile bei Gültigkeit der Nullhypothese bzw. der Alternativhypothese
$\mathbf{u}(t)$	Vektor der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß sich der Prozeß in der Periode t in einem absorbierenden Zustand befindet
$\mathbf{v}(t)$	Vektor der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß sich der Prozeß in der Periode t in einem nicht absorbierenden Zustand befindet
$VES(\theta)$	Vertrauensgrenze des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs
$VSN(\theta)$	VSN-Funktion (Funktion der Varianz des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs)
$\hat{VSN}(\theta)$	Schätzwert für $VSN(\theta)$
$W(E)$	Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E
$\mathbf{W}$	Übergangsmatrix einer Markov-Kette
$\mathbf{w}(t)$	Wahrscheinlichkeitsvektor für die Periode t
X	Anzahl der fehlerhaften Elemente in der Stichprobe (Zufallsvariable)
x	konkrete Ausprägung der Zufallsvariablen X
Y	entscheidungsnotwendiger Stichprobenumfang (Zufallsvariable)
y	konkrete Ausprägung der Zufallsvariablen Y
$\mathbf{O}$	Nullmatrix

Abkürzungsverzeichnis

a.a.O.	am angegebenen Orte
AMS	Annals of Mathematical Statistics
AQL	acceptable quality limit (annehmbare Qualitätsgrenzlage)
ASN	average samle number (durchschnittlicher Stichprobenumfang)
ASQ	Deutsche Arbeitsgemeinschaft für Statistische Qualitätskontrolle
AStA	Allgemeines Statistisches Archiv
Aufl.	Auflage
AWF	Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung e.V.
Bd.	Band
bearb.	bearbeitet
BFuP	Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis
bzw.	beziehungsweise
Calif.	California (Kalifornien)
Diss.	Dissertation
Dt.	Deutsch
Ed.	editor (Herausgeber)
ed.	edition (Auflage)
erw.	erweitert
FU	Freie Universität (Berlin)
Hrsg.	Herausgeber
IdW	Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutsch- land e.V., Düsseldorf
Ill.	Illinois
JASA	Journal of the American Statistical Association
JofA	Journal of Accountancy
JRSS	Journal of the Royal Statistical Society
Mass.	Massachusetts
MIL-STD	Military Standard
n.W.	meines Wissens
N.C.	North Carolina

N.J.	New Jersey
o.O.	ohne Ortsangabe
QZ	Qualität und Zuverlässigkeit
SRG	Statistical Research Group, Columbia University
TI	Texas Instruments
verb.	verbessert
VES	Vertrauensgrenze des entscheidungs- notwendigen Stichprobenumfangs
VSN	variance of sample number (Varianz des entscheidungsnotwendigen Stichprobenum- fangs)
WPg	Die Wirtschaftsprüfung
WWU	Westfälische Wilhelms-Universität Münster
ZfB	Zeitschrift für Betriebswirtschaft

1. Einführung

Grundlage allen wirtschaftlichen Handelns sollte das Prinzip sein, einen gegebenen Nutzen mit geringstmöglichem Aufwand oder mit einem gegebenen Aufwand einen höchstmöglichen Nutzen erreichen zu wollen. Dieses sogenannte Wirtschaftlichkeitsprinzip ist auch in den Berufsgrundsätzen des wirtschaftlichen Prüfungswesens ausdrücklich verankert; es bedeutet hier, daß ein fundiertes Urteil mit möglichst geringem Aufwand zu bilden ist. Ein wichtiger Schritt hierzu ist die Ablösung der früher ausschließlich üblichen Vollprüfungen durch Stichprobenprüfungen in allen den Fällen, in denen die Voraussetzungen für die Anwendung von Stichprobenverfahren gegeben sind. In dieser Arbeit soll Stichprobe ausschließlich im Sinne von Zufallsstichprobe verstanden werden, weil nur bei zufälliger Auswahl der einzelnen Stichprobenelemente die Ergebnisse der mathematischen Stichprobentheorie anwendbar sind.

Nachdem das Institut für Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V. bereits in seinem Fachgutachten Nr. 1/1967 die Verwendung mathematisch-statistischer Methoden bei der Stichprobenprüfung einzelner Prüfungsgebiete ausdrücklich zugelassen hat,¹ hat 1976 auch der Gesetzgeber in § 39 HGB für die Inventur die Anwendung von Stichprobenverfahren gestattet: "Bei der Aufstellung des Inventars darf der Bestand der Vermögensgegenstände nach Art,

¹ Vgl. Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V. (Hrsg.), Fachgutachten Nr. 1/67: Grundsätze ordnungsmäßiger Durchführung von Abschlußprüfungen. In: Fachgutachten und Stellungnahmen des IdW auf dem Gebiet der Rechnungslegung und Prüfung, Düsseldorf, Ergänzung 1967, S. 35; ebenfalls abgedruckt in: WYSOCKI, Klaus von, Grundlagen des betriebswirtschaftlichen Prüfungswesens (2., vollständig neubearbeitete Aufl.), München 1977, S. 253; WYSOCKI, Klaus von, HAGEST, Joachim (Hrsg.), Praxis des Prüfungswesens, München 1976, S. 5 und in WPg 20 (1967), S. 160 (zitiert bei WYSOCKI, HAGEST (Hrsg.), a.a.O., S. 5).

Menge und Wert auch mit Hilfe anerkannter mathematisch-statistischer Methoden auf Grund von Stichproben ermittelt werden".¹

Neben der Feststellung des Inventars ist auch die Prüfung der Ordnungsmäßigkeit eines Prüfungsfeldes mittlerweile als ein wichtiger Anwendungsfall von Stichprobenverfahren im Prüfungswesen anerkannt.² Zur Feststellung des Inventars werden im allgemeinen Schätzverfahren (Schätzstichproben) angewandt, wogegen die Prüfung eines Prüfungsfeldes auf Ordnungsmäßigkeit, auch Annahmeprüfung oder Annahmestichprobe (englisch: acceptance sampling) genannt, ein wichtiger Anwendungsfall von Stichprobentestverfahren (Hypothesentests) ist. Als neueste Entwicklung auf dem Gebiet der Annahmestichprobe wird in der Literatur die Verwendung des sogenannten Sequentialtestverfahrens (sequentiellen Hypothesentests) empfohlen, das wirtschaftlicher als herkömmliche Stichprobentestverfahren sein soll.³ Von den verschiedenen, etwa

1 HGB § 39 (2a), 1 Satz 1.

2 Vgl. zum Beispiel: LEFFSON, Ulrich, Wirtschaftsprüfung, Wiesbaden 1977, S. 178 ff.; LEFFSON, U., LIPPMANN, Klaus, BAETGE, Jörg, Zur Sicherheit und Wirtschaftlichkeit der Urteilsbildung bei Prüfungen, Bd. 1 der Schriftenreihe des Instituts für Revisionswesen der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, hrsg. von U. LEFFSON, Düsseldorf 1969, S. 50 ff.; WYSOCKI, Klaus von, Grundlagen ..., a.a.O., S. 122 ff.; ders., Zur Verwendung von Nomogrammen bei der Auswertung von Zufallsstichproben, WPg 28 (1975), S. 492 ff. (wiederabgedruckt in: WYSOCKI, HAGEST, a.a.O., S. 104 ff.), sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

3 Vgl. z. B. SCHULTE, Elmar B., Quantitative Methoden der Urteilsgewinnung bei Unternehmensprüfungen, Diss. Münster 1969 (ebenfalls erschienen als Bd. 3 der Schriftenreihe des Instituts für Revisionswesen der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, hrsg. von U. LEFFSON, Düsseldorf 1970), S. 129 ff.; BUCHNER, Robert, REUTER, Hans Henner, Der Hypothesentest - ein Mittel zur Steigerung der Wirtschaftlichkeit bei Buchprüfungen, BFuP 24 (1972), S. 542 ff., sowie LEFFSON, U., a.a.O., S. 182 ff., LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 62 ff., WYSOCKI, Klaus von, Grundlagen ..., a.a.O., S. 126 ff., ders., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 494 ff. (bzw. 105 ff.).

gleichzeitig entwickelten Sequentialtestverfahren hat lediglich das von Abraham WALD für Anwendungen in der statistischen Qualitätskontrolle in der Rüstungsindustrie entwickelte und als "sequential probability ratio test" (kurz SPRT) bezeichnete Verfahren eine größere Bedeutung erlangt und soll deshalb als einziges Verfahren hier dargestellt werden.¹

Eine sehr enge Übersetzung der von WALD gewählten Bezeichnung, z. B. "sequentieller Wahrscheinlichkeits-Quotiententest" oder "sequentieller Verhältnistest" erscheint nicht zweckmäßig. In Anlehnung an die für Anwendungen in der Statistischen Qualitätskontrolle genormte Übersetzung von "sequential sampling" als "Folgestichprobenprüfung" bzw. "Folge-Stichprobenprüfung" soll der von WALD entwickelte sequentielle Test deshalb in dieser Arbeit als Folgetest bezeichnet werden.²

In deutsch- und englischsprachigen Standardwerken zum wirtschaftlichen Prüfungswesen wird der Begriff "Annahemestichprobe" fast ausschließlich anhand qualitativer (artmäßiger) Merkmale, d. h. anhand des Fehleranteils

1 Eine Zusammenstellung der verschiedenen Verfahren mit Quellenhinweisen gibt SCHULTE, E., a.a.O., S. 129.

2 Vgl. Deutsche Arbeitsgemeinschaft für Statistische Qualitätskontrolle (ASQ) beim Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung (AWF) e.V. (Hrsg.), Begriffserläuterungen und Formelzeichen im Bereich der Statistischen Qualitätskontrolle, ASQ/AWF 4, Berlin, Köln o.J., S. 19; Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG 95082 Statistische Qualitätskontrolle, Attributprüfung, Blatt 1: Begriffe, Köln 1969, S. 6; European Organization for Quality Control (Hrsg.), Glossary of Terms used in Quality Control (4th ed.), o.O. 1976, S. 112; sowie die dort angegebene Literatur. Die Bezeichnung "Folgetest" findet man z. B. auch bei WAGNER, Gustav, Folgetest für die Abnahmeprüfung von Mengen mit großen und kleinen Stückzahlen. Mitteilungsblatt für mathematische Statistik 5 (1953), S. 89 ff.

in der Stichprobe verwendet.¹ Dagegen ist in der statistischen Qualitätskontrolle eine Einteilung von Annahmestichprobenverfahren nach der Art des Untersuchungsmerkmals üblich: Tests anhand qualitativer Merkmale werden unter dem Begriff "Attributprüfung" ("inspection by attributes"), Tests anhand quantitativer Merkmale unter dem Begriff "Variablenprüfung" ("inspection by variables") zusammengefaßt.² Die älteren deutschen Bezeichnungen "Gut-Schlecht-Prüfung", "zählende Prüfung" oder "homograde Stichprobentestverfahren" bzw. "messende Prüfung" oder "heterograde Stichprobentestverfahren" können inzwischen vermutlich als überholt gelten.

Im betrieblichen Prüfungswesen gibt es erst in jüngster Zeit Beiträge zur Verwendung quantitativer (zahlenmäßiger) Merkmale für den Test der Ordnungsmäßigkeit von Prüfungsfeldern.³ Diese Entwicklung befindet sich jedoch offensichtlich noch im Anfangsstadium und hat bislang auch keine große praktische Bedeutung erlangt, so

1 Vgl. die in den Fußnoten 2 und 3 der Seite 2 angegebene Literatur sowie z. B. SMITH, T.M.F., Statistical Sampling for Accountants, London 1976, S. 8 f., S. 194 ff.; McRAE, T.W., Statistical Sampling for Audit and Control, London, New York, Sydney, Toronto 1974, S. 94 ff.; HILL, Henry P., ROTH, Joseph L., ARKIN, Herbert, Sampling in Auditing, A Simplified Guide and Statistical Tables, New York 1962, S. 11 f., sowie die dort angegebene Literatur. Eine Ausnahme bildet SPERL, der jedoch nicht den Begriff "Annahmestichprobe", sondern "Ergebnistest" verwendet. Vgl. SPERL, Andreas, Prüfungsplanung, Bd. 12 der Schriftenreihe des Instituts für Revisionswesen der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, hrsg. von U. LEFFSON, Düsseldorf 1978, S. 186 ff. und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. Deutsche Arbeitsgemeinschaft für Statistische Qualitätskontrolle (Hrsg.), Begriffserläuterungen und Formelzeichen ..., a.a.O., S. 19; Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG 95 082 ..., Blatt 1, a.a.O., S. 4; European Organization for Quality Control (Hrsg.), Glossary ..., a.a.O., S. 110.

3 Vgl. SPERL, A., a.a.O., S. 186 ff. und die dort angegebene Literatur.

daß an dieser Stelle hierauf nicht weiter eingegangen werden soll. Diese Entscheidung ist auch dadurch zu begründen, daß durch eine Einbeziehung von Tests anhand quantitativer Merkmale der Umfang dieser Arbeit wesentlich ansteigen und die Übersichtlichkeit der Darstellung beeinträchtigt würden. In Übereinstimmung mit der in der deutsch- und englischsprachigen Literatur zum Prüfungswesen vorherrschenden Eingrenzung sollen deshalb in dieser Arbeit nur Tests zur Prüfung der Ordnungsmäßigkeit eines Prüfungsfeldes anhand qualitativer Merkmale dargestellt werden. Diese Tests sollen auch als "Annahmestichproben" bezeichnet werden.

Im folgenden zweiten Kapitel dieser Arbeit soll nach einer kurzen Einführung in die Grundlagen statistischer Tests für qualitative Merkmale ein Überblick über verschiedene Typen von Testverfahren, die für Annahmestichproben verwendbar sind, gegeben werden, wobei jedoch der Folgetest (Sequentialtest) zunächst unberücksichtigt bleibt. Die Grundlagen der Theorie des Folgetestverfahrens, insbesondere im Hinblick auf die Gestaltung einer zweckentsprechenden Entscheidungsregel und die Ermittlung der Eigenschaften eines vorgegebenen Folgetests, sind im dritten Kapitel dieser Arbeit darzustellen. Das vierte Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Verfahren zur Entwicklung der Eigenschaften eines vorgegebenen Folgetests in den Fällen, in denen keine zufriedenstellende theoretische Lösung existiert. Darzustellen sind insbesondere Simulationsverfahren, Verfahren zur direkten rekursiven Berechnung der Testeigenschaften sowie Verfahren, die sich auf die Theorie absorbierender Markovketten stützen. Hierauf aufbauend zeigt das fünfte Kapitel die Möglichkeiten zur Auswahl eines für eine bestimmte Fragestellung hinsichtlich bestimmter Kriterien optimalen statistischen Tests auf.

Neben den in den Kapiteln zwei bis vier dieser Arbeit darzustellenden Verfahren soll an dieser Stelle auch die Möglichkeit der Auswahl eines Tests aus einen der verschiedenen für Anwendungen in der Statistischen Qualitätskontrolle entwickelten Stichprobensysteme in den Vergleich mit einbezogen werden.¹ Das abschließende sechste Kapitel enthält eine zusammenfassende Beurteilung der verschiedenen Verfahren und einen Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen der Annahmestichprobenverfahren.

¹ Ein Stichprobensystem ist eine Zusammenstellung statistischer Testvorschriften - auch unterschiedlichen Typs - nach bestimmten Gliederungskriterien. Manche der im fünften Kapitel darzustellenden Systeme haben in der statistischen Qualitätskontrolle bereits den Charakter von Normen erlangt.

2. Grundlagen der Anwendung statistischer Testverfahren im Prüfungswesen

2.1 Vorbemerkung

Die Diskussion über die grundsätzliche Anwendbarkeit von Stichprobenverfahren im Prüfungswesen, beispielsweise zur Prüfung auf Ordnungsmäßigkeit, dürfte, wie in der Einführung zu dieser Arbeit dargestellt wurde, inzwischen abgeschlossen sein. Bedingung für die Anwendbarkeit von Zufallsstichproben ist jedoch, daß das betrachtete Prüfungsfeld bestimmte Voraussetzungen erfüllt. Unter "Prüfungsfeld" ist hier ein abgegrenztes Teilobjekt einer Prüfung zu verstehen, über das ein gesondertes Teilurteil abgegeben werden soll.¹ Wenn dieses Teilurteil aufbauend auf den Ergebnissen einer (oder mehrerer) Stichproben getroffen wird, entspricht das Prüfungsfeld der sogenannten "statistischen Grundgesamtheit". In den folgenden Abschnitten sollen deshalb die Begriffe "Prüfungsfeld" und "Grundgesamtheit" synonym verwandt werden.

Das Urteil über ein Prüfungsfeld wird aufgrund der beobachteten Ausprägungen eines Merkmals, des sogenannten Untersuchungsmerkmals, getroffen. Wie im vorangegangenen ersten Kapitel dieser Arbeit ausgeführt wurde, sollen nur qualitative (artmäßige) Merkmale betrachtet werden. In Übereinstimmung mit der in der betriebswirtschaftlichen Literatur vorherrschenden Praxis soll dabei ein dichotomes Untersuchungsmerkmal, d.h. ein qualitatives Merkmal mit nur zwei Ausprägungen, hier "fehlerfrei" und "fehlerhaft" unterstellt werden.

Voraussetzung für die Anwendbarkeit einer Stichprobenprüfung ist, daß das Prüfungsfeld homogen ist, d. h. daß die Ausprägungen der Elemente des Prüfungsfeldes hinsichtlich des Prüfungszieles gleiche Bedeutung für das Prüfungsergebnis haben, und daß das Untersuchungsmerk-

1 Vgl. LEFFSON, U., a.a.O., S. 161 ff.

mal einen Häufigkeitsfall darstellt, also in größerer Anzahl in der Stichprobe enthalten ist.¹ Prüfungsziel ist hier die Feststellung der Ordnungsmäßigkeit eines Prüfungsfeldes, die die sachliche Richtigkeit und die Übereinstimmung der Buchungsvorgänge mit formalen Buchungsvorschriften, z. B. den Grundsätzen ordnungsmäßiger Buchführung (GoB) voraussetzt.²

Ordnungsmäßigkeit bedeutet nicht, daß ein Prüfungsfeld völlig fehlerfrei sein muß, sondern vielmehr, daß der tatsächliche Fehleranteil im Prüfungsfeld kleiner als der vom Prüfer als zulässig empfundene Fehleranteil ist.³ Die Definition von "Fehler" und die Festlegung des tolerablen Fehleranteils im Prüfungsfeld stehen im Ermessen des Prüfers und sollen an dieser Stelle nicht diskutiert werden.⁴ In dieser Arbeit soll unterstellt werden, daß ein zulässiger Fehleranteil θ_0 , der größer als Null ist, vorgegeben ist und daß auch die übrigen Voraussetzungen für Anwendbarkeit einer Stichprobenprüfung, vor allem die Bedingung der Homogenität (Gleichartigkeit) erfüllt sind. Beispielsweise können alle Forderungen, die einen bestimmten Betrag nicht überschreiten, zu einem Prüfungsfeld zusammengefaßt und mit Hilfe von Stichproben geprüft werden; bei Forderungen mit sehr hohen Beträgen empfiehlt sich dagegen eine Vollprüfung.

1 Vgl. z.B. LEFFSON, U., a.a.O., S. 161 ff.; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, Zur Sicherheit und Wirtschaftlichkeit ..., a.a.O., S. 26 ff.; BUCHNER, REUTER, Der Hypothesentest ..., a.a.O., S. 533 ff.; sowie die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. z. B. Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V. (Hrsg.), Fachgutachten Nr. 1/1967, a.a.O., S. 29 ff.; RICHTER, Artur, Prüfung der Ordnungsmäßigkeit des Rechnungswesens. Ein Beitrag zur Prüfungstechnik, ZfB 20 (1950), S. 142 ff. (wiederabgedruckt in: WYSOCKI, HAGEST (Hrsg.), a.a.O., S. 193 ff.).

3 Vgl. BUCHNER, REUTER, Der Hypothesentest ..., a.a.O., S. 533; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, Zur Sicherheit und Wirtschaftlichkeit ..., a.a.O., S. 53 ff.

4 Eine Übersicht verschiedener Fehlerarten gibt z. B. LEFFSON, U., a.a.O., S. 235 ff.

Für die Anwendung von Stichprobenprüfungen dagegen ungeeignet sind Prüfungen auf Unterschlagung, bei denen eine sehr geringe Zahl bewußt verursachter Fehler unterstellt wird, hier liegt also ein sogenannter Möglichkeitsfall vor.¹ Zur Prüfung auf Unterschlagungen ist allenfalls eine bewußt gesteuerte Auswahlprüfung geeignet, die jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden soll, da ihre Ergebnisse keine Wahrscheinlichkeitsaussagen zulassen und somit nicht quantifizierbar sind.²

Wenn die oben genannten Voraussetzungen erfüllt sind, können zur Prüfung der Ordnungsmäßigkeit eines Prüfungsfeldes statistische Tests (Annahmestichproben) verwendet werden. Die Grundlagen dieser Annahmestichprobenverfahren sind in den folgenden Abschnitten dieser Arbeit darzustellen.

2.2 Merkmale statistischer Annahmestichprobenverfahren

Statistische Testverfahren dienen zur Überprüfung bestimmter Hypothesen (Annahmen, Behauptungen) über unbekannte Grundgesamtheiten.³ In den hier darzustellenden Annahmestichprobenverfahren werden Hypothesen des Prüfers über

1 Vgl. LEFFSON, U., a.a.O., S. 237; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 26 ff.

2 Vgl. ebenda, S. 167; WYSOCKI, Klaus von, Grundlagen ..., a.a.O., S. 82 ff.; BUCHNER, Robert, Bewußte Auswahl oder Zufallsauswahl bei der aktienrechtlichen Pflichtprüfung. WPg 14 (1961), S. 657 ff. (wiederabgedruckt in WYSOCKI, HAGEST (Hrsg.), Praxis des Prüfungswesens, S. 86 ff.) sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

3 Vgl. zu den folgenden Ausführungen z.B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, a.a.O., S. 101 ff.; SACHS, Lothar, Angewandte Statistik, Statistische Methoden und ihre Anwendungen (5., neubearb. und erw. Aufl. der "Statistischen Auswertungsmethoden"), Berlin, Heidelberg, New York 1978, S. 90 ff.; SCHAICH, Eberhard, Schätz- und Testmethoden für Sozialwissenschaftler, München 1977, S. 182 ff.

den Fehleranteil der Grundgesamtheit, d. h. des betrachteten Prüfungsfeldes getestet; es handelt sich also um einen sogenannten Parametertest. Wenn der größte Fehleranteil, bei dem ein bestimmtes Prüfungsfeld gerade noch als ordnungsmäßig akzeptiert wird, mit θ_c bezeichnet wird, könnten die zu testenden Hypothesen

$$H_0: \theta \leq \theta_c$$

und

$$H_A: \theta > \theta_c$$

lauten. Die Hypothese H_0 , die sogenannte Nullhypothese, sagt aus, daß der Fehleranteil θ in einem Bereich liegt, in dem das Prüfungsfeld als ordnungsmäßig angenommen werden kann, während die Alternativhypothese (Gegenhypothese) H_A einen nicht mehr tolerierbaren Fehleranteil und damit ein nicht ordnungsmäßiges Prüfungsfeld annimmt.

Als Ergebnis eines statistischen Tests der oben formulierten Hypothesen ist eine der beiden im folgenden angegebenen Aussagen möglich:

- a) Die Nullhypothese kann nicht zurückgewiesen werden, d.h. es besteht kein hinreichender Grund, die Ordnungsmäßigkeit des Prüfungsfeldes anzuzweifeln ("Annahme der Nullhypothese").
- b) Die Nullhypothese wird zurückgewiesen und die Alternativhypothese angenommen, d.h. man muß davon ausgehen, daß das Prüfungsfeld nicht ordnungsmäßig ist ("Rückweisung der Nullhypothese").

Eine exakte Trennung zwischen ordnungsmäßigen und nicht ordnungsmäßigen Prüfungsfeldern ist jedoch mit einem statistischen Test nicht möglich, die Testaussage ist immer mit einem Fehlerrisiko behaftet. Zwei Fehler sind möglich: Die irrtümliche Rückweisung der zutreffenden

Nullhypothese wird als α -Fehler oder Fehler 1. Art bezeichnet, die irrtümliche Annahme der unzutreffenden Nullhypothese als β -Fehler oder Fehler 2. Art. Die entsprechenden Fehler sind in der Tabelle 2.1 dargestellt.

Entscheidung	Wahrer Zustand	
	H_0 trifft zu	H_0 trifft nicht zu
H_0 wird nicht abgelehnt	Richtige Entscheidung	β -Fehler (Fehler 2. Art)
H_0 wird abgelehnt	α -Fehler (Fehler 1. Art)	Richtige Entscheidung

Tab. 2.1: Fehler beim Testen von Hypothesen

Quelle: BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, S. 102.

Die oben angegebene Testformulierung, bei der zwei nicht konkretisierte Hypothesen (Bereichshypothesen, zusammengesetzte Hypothesen) verwendet werden, wird in der Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen nur relativ selten verwendet. Ein Grund hierfür dürfte sein, daß bei einer nicht konkretisierten Alternativhypothese das Risiko einer irrtümlichen Annahme der unzutreffenden Nullhypothese im allgemeinen nicht bestimmt werden kann und somit die Angabe der Sicherheit des Gesamturteils nicht möglich ist¹.

Statt dessen wird überwiegend die Nullhypothese in der Form

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad (2.1)$$

¹ Vgl. LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O. S. 30 und 54; WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 124 f.

und die Alternativhypothese als

$$H_A: \theta = \theta_A \quad \text{mit} \quad \theta_A > \theta_0 \quad (2.2)$$

angegeben¹. Dabei gibt der Prüfer θ_0 und θ_A in der Weise vor, daß ein Prüfungsfeld, das den Fehleranteil θ_0 besitzt, als ordnungsmäßig angenommen werden soll und daß ein Prüfungsfeld mit dem Fehleranteil θ_A als nicht ordnungsmäßig zurückgewiesen werden soll. Welche Werte für θ_0 und θ_A gewählt werden, hängt von der Bedeutung des betrachteten Prüfungsfeldes für das Gesamturteil ab und ist dem Ermessen des Prüfers überlassen. Eine weitergehende Diskussion dieser Frage gehört nicht zur Aufgabe dieser Arbeit und soll deshalb hier unterbleiben.

Wenn der Test zu einer Rückweisung der Nullhypothese führt, hat der Prüfer die Möglichkeit, das Prüfungsurteil einzuschränken oder zunächst das Prüfungsfeld zum Zwecke einer Überarbeitung an den Auftraggeber zurückzugeben und anschließend erneut zu prüfen². Eine nicht gerechtfertigte

¹ Vgl. LEFFSON, U., a.a.O., S. 178 ff.; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 55 ff.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 118 f.; WYSOCKI, Kl. v., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 104; BUCHNER, REUTER, Der Hypothesentest ..., a.a.O., S. 536 f.; VANCE, Laurence L., NETER, John, Statistical Sampling for Auditors and Accountants. New York 1956, S. 92 ff. Tests von drei oder mehr Hypothesen werden manchmal in medizinischen Versuchen zum Zwecke eines Vergleichs verschiedener Behandlungsmethoden angewandt. Darauf soll jedoch in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden.

Unter der Annahme, daß andere Fehleranteile als θ_0 und θ_A unmöglich sind, sind die Hypothesen (2.1) und (2.2) mit den zuvor angegebenen Bereichshypothesen gleichbedeutend. Diese Annahme liegt beispielsweise vielen Herleitungen der im dritten Kapitel dieser Arbeit vorzustellenden Theorie zum Sequentialtestverfahren (Folgetestverfahren) zugrunde.

² Vgl. z.B. LEFFSON, U., a.a.O., S. 180 und S. 334 ff.; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 24.

Zurückweisung des in Wirklichkeit ordnungsmäßigen Prüfungsfeldes (Fehler 1. Art, α -Fehler) verursacht zusätzliche Aufwendungen beim Mandanten des Prüfers; die Wahrscheinlichkeit hierfür wird deshalb auch als Risiko des Prüfungsauftraggebers bezeichnet. Eine irrtümliche Annahme der unzutreffenden Nullhypothese (Fehler 2. Art, β -Fehler) führt zu einem ungerechtfertigt günstigen Prüfungsurteil, das im allgemeinen nicht sofort als falsch erkannt wird¹. Im Extremfall kann ein solcher Fehler eine Schadenersatzklage gegen den Prüfer nach sich ziehen, wenn ein im Vertrauen auf ein irrtümlich zu günstiges Prüfungsurteil getätigtes Geschäft sich später als Verlustgeschäft entpuppt; die entsprechende Fehlerwahrscheinlichkeit wird deshalb auch als Risiko des Prüfers bezeichnet².

Da ein α -Fehler durch zusätzliche Prüfungen im allgemeinen schnell erkannt wird, ein β -Fehler dagegen nicht, ist "das Risiko eines α -Fehlers .. daher vor allem unter dem Aspekt der Prüfungswirtschaftlichkeit zu betrachten"³, während das Risiko eines β -Fehlers unmittelbar die Urteilsqualität beeinflusst⁴.

1 Dagegen wird ein Fehler 1. Art im allgemeinen bei der Überarbeitung eines zurückgewiesenen Prüfungsfeldes durch den Auftraggeber erkannt; vgl. SPERL, A., a.a.O., S. 83; LEFFSON, U., a.a.O., S. 180; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 59 und die jeweils dort angegebene Literatur.

2 Vgl. SCHULTE, E., a.a.O., S. 109; WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., S. 124 f.

3 SPERL, A., a.a.O., S. 83.

4 Vgl. ebenda, S. 83 und die dort angegebene Literatur.

Da ein α -Fehler durch zusätzliche Prüfungen im allgemeinen schnell erkannt wird, ein β -Fehler dagegen nicht, ist "das Risiko eines α -Fehlers .. daher vor allem unter dem Aspekt der Prüfungswirtschaftlichkeit zu betrachten"¹, während das Risiko eines β -Fehlers unmittelbar die Urteilsqualität beeinflusst.²

Die den Hypothesenwerten θ_0 und θ_A entsprechenden Risiken eines Fehlers erster und zweiter Art eines beliebigen vorgegebenen Testverfahrens können aus der sogenannten Operationscharakteristik (OC-Funktion, Annahmekennlinie) dieses Tests abgelesen werden. Die Operationscharakteristik gibt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Test zu einer Annahme der Nullhypothese führt, als Funktion des Fehleranteils θ in der Grundgesamtheit (im Prüfungsfeld) an.³ Den typischen Verlauf der OC-Funktion von Annahmestichprobenverfahren zeigt die Abbildung 2.1.

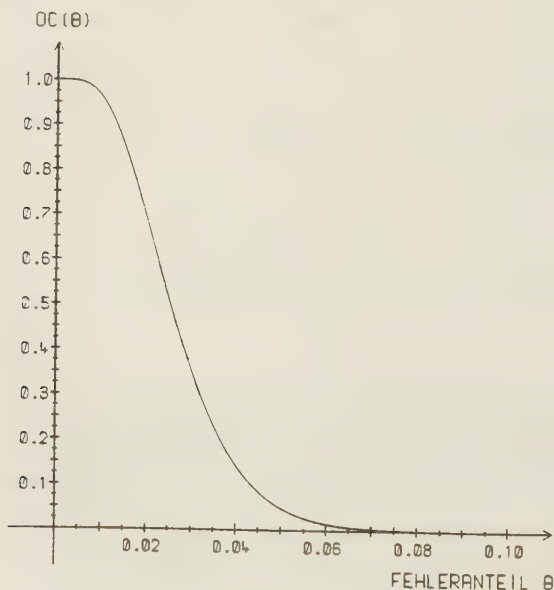


Abb. 2.1: OC-Funktion einer Annahmestichprobe

1 SPERL, A., a.a.O., S. 83.

2 Vgl. ebenda, S. 83 und die dort angegebene Literatur.

3 Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 105 f. sowie die dort angegebene Literatur.

Das mit der Anwendung eines bestimmten Tests verbundene Risiko eines Fehlers erster Art ist als Komplement der OC an der Stelle θ_0

$$\alpha = 1 - OC(\theta_0)$$

und das Risiko eines Fehlers zweiter Art als Wert der OC an der Stelle θ_A

$$\beta = OC(\theta_A)$$

definiert.¹

Jedem statistischen Test ist eindeutig ein bestimmter Verlauf der OC-Funktion zugeordnet. Diese Beziehung ist jedoch nicht ohne weiteres umkehrbar, denn wie an anderer Stelle dieser Arbeit gezeigt werden soll, können Testverfahren unterschiedlichen Typs konstruiert werden, deren Operationscharakteristiken zumindest sehr gut übereinstimmen. Verglichen werden sollen insbesondere Einfach- und Doppeltestverfahren (siehe Abschnitt 2.4 und Punkt 2.5.4 dieser Arbeit) und das in den Kapiteln 3 und 4 darzustellende Folgetestverfahren.

Für alle hier darzustellenden Typen von Testverfahren gilt grundsätzlich, daß eine Erhöhung des Stichprobenumfangs ceteris paribus zu einem steileren Verlauf der

¹ Das in der statistischen Qualitätskontrolle gebräuchliche und dort auch genormte Symbol L für die Operationscharakteristik soll hier nicht verwendet werden, weil mit diesem Symbol auch die in Abschnitt 3.2 dieser Arbeit einzuführende Prüfgröße des Folgetests bezeichnet wird. Zur Normung vgl. Deutsche Arbeitsgemeinschaft für Statistische Qualitätskontrolle (Hrsg.), Begriffserläuterungen und Formelzeichen ..., a.a.O., S. 27; Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG 95 083, Statistische Qualitätskontrolle, Attributprüfung. Blatt 1: Zeichen, Formeln und Abkürzungen. Köln (Beuth-Vertrieb), August 1965.

Operationscharakteristik (OC-Funktion) führt und daß umgekehrt eine Verringerung des Stichprobenumfangs ceteris paribus einen flacheren Verlauf der Operationscharakteristik zur Folge hat.¹ Je steiler die OC-Funktion verläuft, desto besser kann anhand des entsprechenden Tests zwischen "guten" und "schlechten" Prüfungsfeldern unterschieden werden.

Der Stichprobenumfang ist beim sogenannten Einfachtest (Einfach-Stichprobenprüfung) eine feste Größe - eine Ausnahme bildet nur der in Punkt 2.5.2 dieser Arbeit darzustellende "abgebrochene" Test -, während beim Doppeltest- und Folgetestverfahren der zu einer Entscheidung für Annahme oder Rückweisung der Nullhypothese notwendige Stichprobenumfang eine Zufallsvariable ist. In diesen Fällen soll zunächst - wie in der Literatur vorgeschlagen wird, der durchschnittliche Stichprobenumfang (average sample number, kurz ASN) als Maß für den Erhebungsumfang eines bestimmten Tests verwendet werden.² Die Funktion des durchschnittlichen Stichprobenumfangs abhängig vom Fehleranteil θ der Grundgesamtheit (des Prüfungsfeldes) soll in dieser Arbeit in Anlehnung an die in der englischsprachigen Literatur vorherrschende Bezeichnung als ASN-Funktion bezeichnet werden. Einen typischen Verlauf zeigt Abbildung 2.2.

¹ Anschauliche Beispiele findet man z. B. bei SCHAAFSMA, A.H., WILLEMZE, F.G., Moderne Qualitätskontrolle. Statistische und Organisatorische Grundlagen der Qualitätsgestaltung (7. Aufl.), Hamburg 1973, S. 195 ff.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 33 f., S. 41 f.; vgl. auch BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 106.

² Vgl. VANCE, NETER, a.a.O., S. 48 ff.

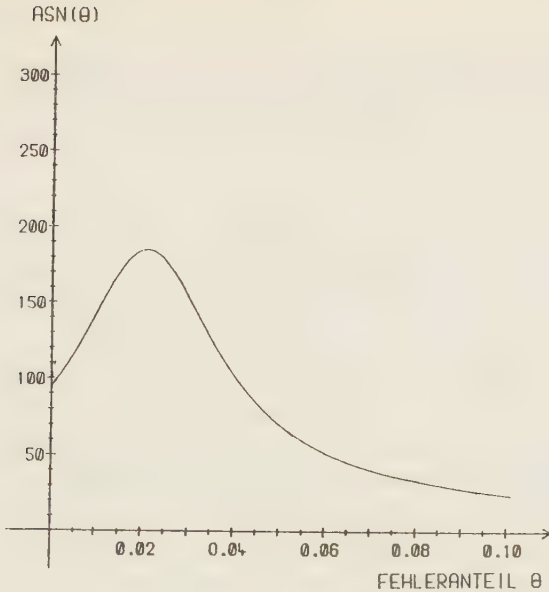


Abb. 2.2: Typischer Verlauf einer ASN-Funktion

Aufgabe des Prüfers ist es nun, einen Kompromiß zwischen den sich widersprechenden Forderungen nach möglichst guter Trennung zwischen "guten" und "schlechten" Prüfungsfeldern und nach einem möglichst geringen Stichprobenumfang zu finden. Alternative Lösungsvorschläge sind im folgenden Punkt dieser Arbeit darzustellen.

2.3 Gestaltung eines statistischen Tests

Im Fachgutachten 1/67 des IdW ist festgelegt, daß bei der Anwendung von Stichproben "der notwendige Sicherheitsgrad und der zulässige Fehlerspielraum .. unter Beachtung der Bedeutung des einzelnen Prüfungsgegenstandes und des Fehlerrisikos zu bemessen"¹ sind. Dies wird in der Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen für den Fall der Annahmestichprobe überwiegend so interpretiert, daß

¹ Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V.
(Hrsg.), Fachgutachten 1/67, a.a.O., S. 35.

der Prüfer die höchstzulässigen Risiken für die Fehler erster bzw. zweiter Art vorgeben und dann einen Hypothesentest so auswählen muß, der diesen Bedingungen entspricht.¹

Durch die Vorgabe der zu testenden Hypothesenwerte θ_0 und θ_A (siehe Seite 10 f. dieser Arbeit) und der zulässigen Risiken α und β sind zwei Punkte der Operationscharakteristik vorgegeben, wie in der Abbildung 2.1 auf Seite 14 dieser Arbeit dargestellt ist. Da jedoch beim Test qualitativer Merkmale die Zahl möglicher verschiedener Tests endlich ist, kann auch die OC-Funktion an den Stellen θ_0 und θ_A nur endlich viele Werte annehmen, so daß nicht sicher ist, ob die oben definierten Punkte exakt erreichbar sind.² Deshalb fordert man, daß die oben angegebenen Fehlerrisiken zumindest nicht überschritten werden und definiert die Bedingungen

$$OC(\theta_0) \geq 1 - \alpha \quad (2.3)$$

und

$$OC(\theta_A) \leq \beta . \quad (2.4)$$

Sämtliche Tests, deren OC-Funktion die beiden oben angegebenen Ungleichungen erfüllt, können in einer durch die vier Parameter θ_0 , θ_A , α und β gekennzeichneten Prüfungssituation als Test zur Prüfung der Ordnungsmäßigkeit eingesetzt werden. Aus wirtschaftlichen Gründen wird man solche Tests bevorzugen, die einen möglichst geringen (durchschnittlichen) Erhebungsumfang besitzen und die oben definierte Bedingung gerade noch einhalten. Ansätze zur Bestimmung geeigneter Einfachtests werden in Abschnitt

1 Vgl. z. B. LEFFSON, U., a.a.O., S. 181 ff.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 118 ff.; WYSOCKI, Kł. v., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 104 ff.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 38 ff. sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

2 Dies gilt für Tests mit endlichem Stichprobenumfang; vgl. UHLMANN, Werner, Statistische Qualitätskontrolle. Eine Einführung. Stuttgart 1966, S. 106.

2.4 dieser Arbeit bzw. zur Bestimmung geeigneter Doppeltests oder Folgetests in Punkt 2.5.3 bzw. in den Kapiteln 3, 4 und 5 dieser Arbeit dargestellt.

Die Vorgabe der zulässigen Fehlerrisiken ist Aufgabe des Prüfers und nur in Hinblick auf das Prüfungsziel und auf die Bedeutung dieses Prüfungsfeldes für das Gesamturteil möglich. Eine einheitliche Meinung über das zulässige Risiko eines α -Fehlers (Fehler erster Art, Wahrscheinlichkeit für Zurückweisung eines tolerablen Prüfungsfeldes) bzw. eines β -Fehlers (Fehler zweiter Art, Wahrscheinlichkeit für Annahme eines nicht tolerablen Prüfungsfeldes) existiert in der Literatur bislang offenbar nicht. So sagt WYSOCKI, daß "als Orientierungsgröße für die beiden Fehlurteilsrisiken ein Wert von 5 % ($\alpha = \beta = 0,05$) angemessen sein [dürfte]"¹ bzw. daß "im allgemeinen .. ein α -Risiko in Höhe von $\alpha = 0,05$ vollkommen ausreichen [dürfte]"².

VANCE und NETER formulieren als Ergebnis eigener Versuche mit zulässigen Risiken von $\alpha = 0,05$ und β zwischen 0,05 und 0,10, daß diese zulässigen Risiken "ausreichend sein könnten".³ Dagegen fordert LEFFSON, das Risiko eines β -Fehlers, der ja (wie auf Seite 12 ff. dieser Arbeit dargestellt) für den Prüfer schwerwiegender ist, "im Vergleich zum Risiko eines α -Fehlers ... möglichst niedrig" anzusetzen.⁴ In den von ihm angegebenen Beispielen wählt LEFFSON $\alpha = 0,04$ und $\beta = 0,02$ als zulässige Fehlerrisiken.⁵

1 WYSOCKI, K1. v., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 104.

2 Ders., Grundlagen ..., a.a.O., S. 125.

3 VANCE, NETER, a.a.O., S. 136 f.

4 LEFFSON, U., a.a.O., S. 180.

5 Vgl. ebenda, S. 182 ff.; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 59 ff.

Vorschläge zur Bestimmung der bei der Auswahl eines Tests zugrunde zu legenden zulässigen Risiken eines α - und eines β -Fehlers abhängig von zusätzlichen Informationen des Prüfers finden sich bei ELLIOT, ROGERS und bei SPERL. ELLIOT und ROGERS empfehlen, für α einen Wert von 0,05 oder 0,10 festzulegen und mit Hilfe eines Punktesystems - abhängig vom Zustand des sogenannten Internen Kontrollsystems¹ und von zusätzlichen Prüfungsinformationen - für β einen Wert zwischen 0,05 und 0,50 auszuwählen oder sogar ganz auf einen statistischen Test zu verzichten.²

Einen völlig anderen Weg beschreitet SPERL: Er definiert die "Beweiskraft" einer Stichprobeninformation Q für die Nullhypothese H_0 als bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Nullhypothese H_0 tatsächlich wahr ist, wenn das Stichprobenergebnis für Annahme der Nullhypothese spricht.³

Diese Beweiskraft ist abhängig von den Wahrscheinlichkeiten (a-priori-Wahrscheinlichkeiten) $W(H_0)$ bzw. $W(H_A)$ für das Eintreffen der Null- bzw. der Alternativhypothese vor Durchführung des Tests und den (bedingten) Wahrscheinlichkeiten $W(Q/H_0) = 1 - \alpha$ bzw. $W(Q/H_A) = \beta$ dafür, daß der Test zu einer Annahmeentscheidung führt, wenn die Nullhypothese bzw. die Alternativhypothese zutrifft. Mit Hilfe des Bayesschen Theorems⁴ kann die "Beweiskraft"

1 Zur Prüfung des Internen Kontrollsystems vgl. z. B. LEFFSON, U., a.a.O., S. 211 ff.

2 Vgl. ELLIOT, R.K., ROGERS, J.R., Relating Statistical Sampling to Audit Objectives. The Journal of Accountancy (1972), S. 46 ff. (zitiert bei: SMITH, T.M.F., a.a.O., S. 166 f.).

3 Vgl. SPERL, A., a.a.O., S. 79 ff.

4 Eine allgemeine Darstellung des Theorems von Bayes, das ausgehend von a-priori-Wahrscheinlichkeiten die Berechnung von a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten gestattet, findet man z. B. bei BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 36 f.; WETZEL, Wolfgang, Statistische Grundausbildung für Wirtschaftswissenschaftler. Band II: Schließende Statistik. Berlin, New York 1973, S. 28 ff.; MOOD, Alexander M., GRAYBILL, Franklin A., BOES, Duane C., Introduction to the theory of statistics (3rd ed.), Tokyo, Auckland, Düsseldorf u. a. 1974, S. 35 ff. sowie in der jeweils dort angegebenen Literatur.

$W(H_0/Q)$ (a-posteriori-Wahrscheinlichkeit) als

$$W(H_0/Q) = \frac{W(H_0) W(Q/H_0)}{W(H_0) W(Q/H_0) + W(H_A) W(Q/H_A)} \quad (2.5)$$

$$= \frac{(1-\alpha) W(H_0)}{(1-\alpha) W(H_0) + \beta W(H_A)} \quad (2.6)$$

berechnet werden.¹ Als Nebenbedingung muß

$$W(H_0) + W(H_A) = 1 \quad (2.7)$$

gelten. SPERL schlägt vor, eine Mindestsicherheit $U_{\min}$ des Urteils vorzugeben; zulässig sind die Tests, die die Bedingung

$$W(H_0/Q) \geq U_{\min} \quad (2.8)$$

erfüllen.² Wenn die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(H_0)$ und $W(H_A)$ sowie der Wert für α vorgegeben sind, kann aus der Gleichung 2.6 der höchstzulässige Wert für β berechnet werden, für den die Bedingung 2.8 erfüllt ist.

Wie man sieht, gipfeln die Konzepte von ELLIOT/ROGERS und von SPERL in einer Vorgabe der Hypothesenwerte H_0 und H_A und der zulässigen Risiken eines α - und eines β -Fehlers, wobei jedoch die Bestimmung der zulässigen Risiken von zusätzlichen Informationen abhängig gemacht wird. Bei dem Konzept von ELLIOT und ROGERS schlagen sich die zusätzlichen Informationen in einer Punktbewertung nieder, wogegen im Konzept von SPERL die zusätzlichen Informationen in Form von a-priori-Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden.

1 Vgl. SPERL, A., a.a.O., S. 80 ff.

2 Vgl. ebenda, S. 84 ff.

Eine objektive Schätzung der a-priori-Wahrscheinlichkeiten ist jedoch im allgemeinen nicht möglich, so daß der Prüfer die a-priori-Wahrscheinlichkeiten als "Indizes des subjektiven Vertrauens des Urteilenden in das Zutreffen der alternativen Prüfungshypothesen"¹ schätzen muß. Die Ermittlung subjektiver a-priori-Wahrscheinlichkeiten jedoch ist umstritten, weil hierdurch subjektive Elemente in das Prüfungsurteil gelangen und die objektive (intersubjektive) Nachprüfbarkeit des Prüfungsurteils aufgehoben wird.²

Aus den zuletzt genannten Gründen sollen hier die Ansätze von ELLIOT/ROGERS bzw. von SPERL nicht weiter berücksichtigt werden. In dieser Arbeit soll unterstellt werden, daß die Werte von θ_0 , θ_A , α und β vom Prüfer festgelegt worden sind; und als Kompromiß zwischen den Vorschlägen von LEFFSON und WYSOCKI zur Vorgabe von α und β sollen hier die Kombinationen $\alpha = \beta = 0,05$ und $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,02$ bei der Konstruktion von Beispielen zugrunde gelegt werden.

In der Literatur zum betrieblichen Prüfungswesen haben andere als die bisher dargestellten Ansätze zur Definition einer Mindestanforderung an den Verlauf der Operationscharakteristik (Annahmekennlinie, OC-Funktion), die für Anwendungen in der statistischen Qualitätskontrolle gebräuchlich sind, bislang offensichtlich noch keine Bedeutung erlangt.

1 SPERL, A., a.a.O., S. 81. Eine ähnliche Argumentation findet man z. B. bei: REUTER, Hans Henner, Prüfungsumfang und Urteilsbildung im Rahmen einer Buchprüfung auf Stichprobenbasis. Frankfurt/M., Zürich 1975, S. 155 ff.; BÜCKER, Rüdiger, Lösungsmöglichkeiten von Entscheidungsproblemen unter Anwendung der Bayesschen Entscheidungstheorie, dargestellt am Beispiel einiger betriebswirtschaftlicher Entscheidungssituationen. Diss. Münster 1972, S. 50 ff.; BUCHNER, Robert, KRANE, H.G., REUTER, H.H., Zur Anwendung des Bayesschen Theorems bei Buchprüfungen auf Stichprobenbasis. ZfB 41 (1971), S. 10 ff. sowie in der jeweils dort angegebenen Literatur.

2 Vgl. REUTER, H.H., a.a.O., S. 155 und die dort angegebene Literatur.

So ist von CAMPBELL und von HAMAKER die Kennzeichnung des gewünschten Verlaufes der OC-Funktion durch die Vorgabe des sogenannten "Kontrollpunktes" und der sogenannten "Steilheit" der OC vorgeschlagen worden.¹ Der Kontrollpunkt - er wird an anderer Stelle auch als "Prüfungspunkt", "Indifferenzpunkt", "Indifferente Qualität" oder "50 %-Punkt der OC" bezeichnet - ist der Anteilswert, bei dem die Annahmewahrscheinlichkeit genau den Wert 0,5 besitzt.² Die Steilheit h_0 ist als relative Neigung der Operationscharakteristik im Prüfungspunkt, also an der Stelle $\theta = \theta_{0,5}$ definiert.³ Die Operationscharakteristiken zweier Tests mit unterschiedlichen Kontrollpunkten, aber gleicher relativer Neigung sind in der Abbildung 2.3 dargestellt.

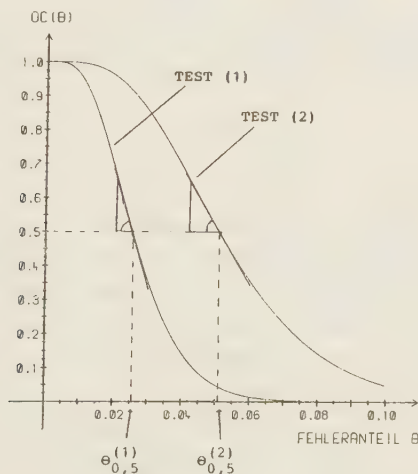


Abb. 2.3: OC-Funktionen zweier Tests mit gleicher relativer Neigung (Steilheit)

1 HAMAKER, Hugo C., Theorie der Stichprobenschemas. Philips' Technische Rundschau 11 (1949/50), S. 265 ff.; CAMPBELL, G.A., (Titel unbekannt). Bell System Technical Journal 2 (1923), S. 95 ff. (zitiert bei HAMAKER, a.a.O., S. 266); vgl. zu den folgenden Ausführungen auch SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 204 ff.; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, S. 108 ff.

2 Vgl. z. B. European Organization for Quality Control (Hrsg.), Glossary of Terms ..., a.a.O., S. 111; Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG 95 082 ..., Blatt 1, a.a.O., S. 4, und die dort angegebene Literatur.

3 Steilheit = relative Neigung = $\frac{\text{Neigung an der Stelle } \theta_{0,5}}{\text{Fehleranteil } \theta_{0,5}}$

Dieses von CAMPBELL und von HAMAKER entwickelte Konzept ist im "Philips Standard Stichprobensystem" als Gliederungs- und Auswahlkriterium verwendet worden.¹ Interessant ist dieses Konzept vor allem deshalb, weil mit Hilfe von Näherungsformeln für vorgegebene Werte des Prüfungspunktes $\theta_{0,5}$ und der relativen Neigung h_0 der erforderliche Stichprobenumfang n und die Annahmekennzahl c eines passenden Einfachtests unmittelbar als

$$c \approx \frac{\pi}{2} h_0^2 - 0,73 \quad (\pi = 3,14159...) \quad (2.9)$$

und

$$n \approx \frac{c + 0,67}{\theta_{0,5}} \quad (2.10)$$

bestimmt werden können.² Da der nach der Formel (2.9) für die Annahmekennzahl c errechnete Wert im allgemeinen nicht ganzzahlig sein wird, wird man, wenn der vorgegebene Wert der relativen Neigung h_0 als Mindestforderung angesehen wird, den gefundenen Wert für c auf die nächstgrößere ganze Zahl aufrunden und davon ausgehend den erforderlichen Stichprobenumfang nach Formel (2.10) bestimmen. Dieses Konzept hat jedoch meines Wissens im Prüfungswesen noch keine Resonanz gefunden, auch sind bislang offensichtlich noch keine allgemeingültigen direkten Beziehungen zur Transformation der Werte θ_0 , θ_A , α und β in $\theta_{0,5}$ und h_0 oder umgekehrt abgeleitet worden. Aus diesem Grunde soll auf eine weitergehende Darstellung dieses Konzeptes verzichtet werden.

¹ Vgl. SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 216 f., 228 f., 468 ff. und 482 ff.; HAMAKER, H.C., CHABOT, J.J.M. Taudin, WILLEMZE, F.G., Stichprobenschemas und Stichprobentabellen in der Praxis. Philips' Technische Rundschau 11 (1949/50), S. 372 ff.

² Vgl. HAMAKER, H.C., a.a.O., S. 266 f.; HAMAKER, CHABOT, WILLEMZE, a.a.O., S. 370 ff.; SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 208 ff.; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, S. 109 ff.

Ein dem zuletzt dargestellten Ansatz ähnliches Konzept zur Vorgabe des gewünschten Verlaufes der Operationscharakteristik eines Tests ist in der deutschsprachigen Literatur zur statistischen Qualitätskontrolle entwickelt worden. Als Maß für die Lage der Operationscharakteristik wird die sogenannte "Bewertungsschärfe" verwendet, die der Kehrwert der oben definierten "indifferenten Qualität" (Kontrollpunkt, Prüfungspunkt) ist.¹ Die so definierte Bewertungsschärfe

$$B = \frac{1}{\theta_{0,5}}$$

steigt an, wenn die "indifferente Qualität" verringert wird. Als Maß für die relative Neigung der Operationscharakteristik eines Tests qualitativer Merkmale wird das sogenannte "Trennvermögen" als

$$T = \frac{\theta_{0,5}}{\theta_{0,5} - \theta_{0,9}}$$

definiert;² dabei ist $\theta_{0,9}$ der Anteilswert, bei dem die Annahmewahrscheinlichkeit des Tests genau 0,9 oder 90 % beträgt. Als absolutes Maß für die Leistungsfähigkeit eines Tests erhält man die sogenannte "Prüfschärfe" als Produkt aus der Bewertungsschärfe und dem Trennvermögen, also als

$$P = B \cdot T = \frac{1}{\theta_{0,5} - \theta_{0,9}} \cdot$$

1 Vgl. zu den folgenden Ausführungen GEIGER, W., Einige Grundgedanken zum Begriff "Prüfschärfe". Qualität und Zuverlässigkeit 21 (1976), S. 98 f., sowie die dort angegebene Literatur.

2 Eine andere als die hier angegebene Definition findet man bei BAUMANN, Heinz-Dieter, GREIS, Peter, Statistische Prüfung. Eine praxisnahe Einführung in die Grundbegriffe mit Beispielen aus der Drahtindustrie. Düsseldorf 1978, S. 8 ff.

Verwendung hat diese Systematisierung bislang offensichtlich nur zur Auswahl eines geeigneten Tests aus einem Stichprobensystem, also aus einer Sammlung von nach bestimmten Kriterien geordneten Hypothesentests, gefunden.¹ In der Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungsweisen hat dieses Konzept meines Wissens noch keine Beachtung gefunden und soll deshalb, da es gegenüber der Vorgabe der vier Werte θ_0 , θ_A , α und β keine erkennbaren Vorzüge bietet, hier nicht weiter betrachtet werden.

Ebenfalls aus der statistischen Qualitätskontrolle stammt der Vorschlag, die Vorgabe der zulässigen Fehlerrisiken oder anderer Kenngrößen der OC-Funktion teilweise oder ganz durch das Ziel einer Kostenminimierung zu ersetzen. Nach diesem Prinzip ausgewählte Hypothesentests werden als "kostengünstigste", "kostenoptimale" oder "wirtschaftliche" Tests, im englischen als "optimal" oder "economic sampling plans" bezeichnet.²

Als bedingte wirtschaftliche Prüfpläne ("restricted" oder "semi economic sampling plans") werden Tests bezeichnet, in denen ein Punkt der OC-Funktion fest vorgegeben wird.³ Dabei wird im allgemeinen entweder der

1 Vgl. GEIGER, W., a.a.O., S. 99 f. und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. zu den folgenden Ausführungen z. B. STANGE, Kurt, Kostengünstigste Prüfpläne. Eine Übersicht über den Stand der Entwicklung. Ablauf- und Planungsforschung 10 (1969), S. 323 ff.; UHLMANN, W., Kostenoptimale Prüfpläne. Tabellen, Praxis und Theorie eines Verfahrens der statistischen Qualitätskontrolle. Würzburg, Wien 1969, S. 6 ff.; BASLER, H., Bestimmung kostenoptimaler Prüfpläne mittels des Mini-Max-Prinzips. Metrika 12 (1967/1968), S. 115 ff.; WETHERILL, G.B., CHIU, W.K., A Review of Acceptance Sampling Schemes with Emphasis on the Economic Aspect. International Statistical Review 43 (1975), S. 191 ff.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

3 Vgl. FITZNER, D., Bedingte und unbedingte Bayes Prüfpläne für die Gut-Schlecht-Prüfung. In: Proceedings in Operations Research 6 (1976), S. 204 ff.; WETHERILL, CHIU, a.a.O., S. 194 ff. und die dort angegebene Literatur.

Wert der OC (Annahmekennlinie) an der Stelle θ_0 (tolerabler Fehleranteil, Gutgrenze) oder an der Stelle θ_A (nicht tolerabler Fehleranteil, Schlechtgrenze) oder aber der Indifferenzpunkt der OC-Funktion fixiert. Beispiele hierfür finden sich in den im fünften Kapitel dieser Arbeit darzustellenden Stichprobensystemen. Unbedingte ("unrestricted" bzw. "fully economic") wirtschaftliche Prüfpläne sind dagegen dadurch gekennzeichnet, daß bei der Auswahl eines geeigneten Tests ausschließlich Kostengesichtspunkte berücksichtigt werden.¹

Voraussetzung für die Anwendung wirtschaftlicher Prüfpläne ist, daß die möglichen Risiken eines Fehlers erster Art und eines Fehlers zweiter Art mit Kosten bewertet werden können.² Ebenso sind die durch die Entnahme einer Stichprobe als Funktion des Erhebungsumfanges entstehenden Kosten und gegebenenfalls die Kosten für die Nacharbeitung eines abgelehnten Prüfungsfeldes zu quantifizieren.

Mit Hilfe dieser Angaben können zwei sogenannte "Verlustfunktionen"-eine für den Fall der Annahme der Nullhypothese und eine für den Fall der Rückweisung der Nullhypothese- als Funktionen des Fehleranteils θ der Grundgesamtheit und der Parameter des gewählten Tests bestimmt werden. Durch Gewichtung dieser beiden Verlustfunktionen mit der OC-Funktion bzw. mit dem Komplement der OC-Funktion dieses Tests erhält man die Funktion des durchschnittlichen Gesamtverlustes. Im allgemeinen wird jedoch nicht diese Funktion, sondern die Funktion des normierten durch-

1 Eine andere Definition geben WETHERILL und CHIU, die die im folgenden darzustellenden "Minimax-Tests" nicht zu den "fully economic schemes" zählen; vgl. WETHERILL, CHIU, a.a.O., S. 196 ff.; vgl. auch FITZNER, D., a.a.O., S. 205.

2 Vgl. z. B. STANGE, K., a.a.O., S. 324 ff.; BASLER, H., a.a.O., S. 116 ff.; UHLMANN, W., Kostenoptimale Prüfpläne, S. 6 ff.

schnittlich vermeidbaren Verlustes (Restkostenfunktion, Regretfunktion) als Auswahlkriterium betrachtet; das ist die normierte Differenz zwischen dem durchschnittlichen Gesamtverlust und dem auch im Falle vollständiger Information unvermeidbaren Verlust.¹

Da die Regretfunktion eine Funktion des Fehleranteils θ der Grundgesamtheit ist, sind abhängig vom Informationsstand des Prüfenden zwei verschiedene Vorgehensweisen möglich:

- a) Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Auftreten bestimmter Fehleranteile θ in der zu prüfenden Grundgesamtheit bekannt ist - diese Verteilung wird auch als "a-priori-Verteilung" oder als "Fertigungsfunktion" bezeichnet - ist derjenige Test kostenoptimal, für den der Erwartungswert der Regretfunktion den geringsten Wert besitzt.² Ein solcher Test wird auch als "Bayes-Test" bezeichnet.³
- b) Wenn Informationen über die Verteilung der Fehleranteile θ in der Grundgesamtheit nicht vorliegen, wird für jeden Test das Maximum der Regretfunktion bestimmt und derjenige Test als optimal ausgewählt, bei dem dieses Maximum den kleinsten Wert besitzt; diese Lösung heißt Minimax-Lösung (Min-Max-Lösung, Minimumlösung).⁴

1 Vgl. hierzu z. B. STANGE, K., a.a.O., S. 329 ff.; UHLMANN, W., Kostenoptimale Prüfpläne, S. 11 ff.; BASLER, H., a.a.O., S. 119 ff.; FITZNER, Dieter, LENZ, Hans-J., Zur Konstruktion kostenoptimaler Prüfpläne für die Gut-Schlecht-Prüfung. AStA 59 (1975), S. 121 ff.

2 Vgl. STANGE, K., a.a.O., S. 325 ff. und 333 ff.; BASLER, H., a.a.O., S. 120 f.; FITZNER, LENZ, a.a.O., S. 122 ff.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

3 Vgl. die Fußnote auf Seite 20 dieser Arbeit sowie MOOD, GRAYBILL, BOES, a.a.O., S. 417 f.

4 Vgl. z. B. STANGE, K., a.a.O., S. 328 ff.; BASLER, H., a.a.O., S. 121 ff.; UHLMANN, W., Kostenoptimale Prüfpläne, S. 16 ff.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

Die Verwendung eines Bayes-Tests bedeutet gegenüber einem Minimax-Test im allgemeinen einen geringeren, höchstens gleichgroßen, Prüfaufwand,¹ setzt jedoch die Kenntnis der a-priori-Verteilung des Fehleranteils θ in der Grundgesamtheit voraus.

Bei Anwendungen in der statistischen Qualitätskontrolle kann die a-priori-Verteilung (Fertigungsfunktion) geschätzt werden, wenn eine laufende Überwachung der zu prüfenden Gesamtheiten erfolgt; ein Beispiel einer solchen Verteilung ist in der Abbildung 2.4 dargestellt.² Zur Vereinfachung wird jedoch oft auch eine bestimmte Form der Verteilung, z. B. Betaverteilung, Gleichverteilung (Rechteckverteilung) oder Zwei-Punktverteilung, unterstellt.³

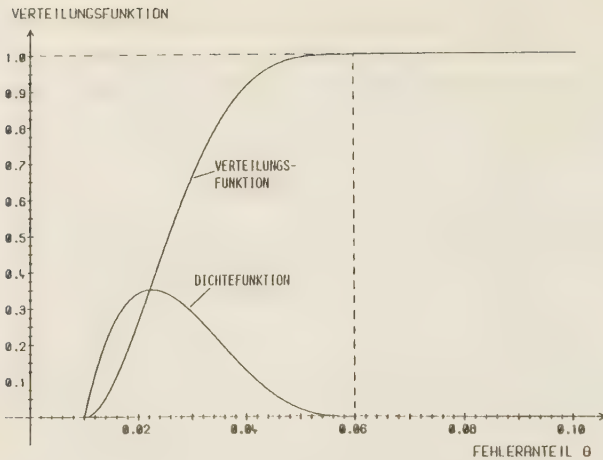
Wie bereits an anderer Stelle festgestellt wurde, können bei der Ordnungsmäßigkeitsprüfung eines Prüfungsfeldes, die nur einmal jährlich durchgeführt wird, a-priori-Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Fehleranteile θ im allgemeinen nicht als bekannt vorausgesetzt werden.⁴ Möglich wäre unter den bereits genannten Einschränkungen nur eine subjektive Schätzung der a-priori-Verteilung bzw. die Anwendung der Minimax-Lösung, die keine Kenntnis der a-priori-Verteilung erfordert.

1 Vgl. FITZNER, LENZ, a.a.O., S. 128. Diese Eigenschaft ist für Tests quantitativer Merkmale auch von JOHN bewiesen worden. Vgl. JOHN, Bernd, Wirtschaftliche Pläne für messende Prüfung bei Kenntnis der Qualitätszahlverteilung (a-priori-Verteilung). Diss. Aachen 1964, S. 22.

2 Vgl. STANGE, K., a.a.O., S. 333.

3 Vgl. WETHERILL, CHIU, a.a.O., S. 193 und 197 ff. sowie die dort angegebene Literatur.

4 Vgl. Seite 22 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.



Quelle: In Anlehnung an STANGE, K., a.a.O., S. 327.

Abb. 2.4: Beispiel einer a-priori-Verteilung des Fehleranteils

Das entscheidende Problem bei der Anwendung wirtschaftlicher Tests im Prüfungswesen liegt jedoch in der Notwendigkeit der Bewertung der Risiken eines Fehlers erster bzw. zweiter Art. Ein Fehler erster Art (α -Fehler) bedeutet im allgemeinen, daß ein zurückgewiesenes, aber ordnungsgemäßes Prüfungsfeld zur Nachbearbeitung an den Prüfungsauftraggeber zurückgegeben wird.¹ Der hierzu erforderliche Arbeitsaufwand ist im allgemeinen berechenbar. Eine zu häufige ungerechtfertigte Rückweisung von Prüfungsfeldern schadet jedoch dem Ansehen des Prüfers; auch dieser (immaterielle) Schaden müßte in Geldeinheiten bewertet werden.

Noch schlechter kalkulierbar dürfte jedoch das Risiko eines Fehlers zweiter Art (β -Fehler) sein. Dieser Fehler kann das Prüfungsurteil verfälschen und kann - wenn er nachträglich aufgedeckt wird - eine Schadenersatzklage gegen den Prüfer oder zumindest einen in Geldeinheiten kaum zu quantifizierenden Vertrauensverlust des Prüfers zur Folge haben.

¹ Vgl. zum folgenden auch Seite 12 ff. dieser Arbeit und diedort angegebene Literatur.

Diese hier dargestellten Probleme dürften der Grund dafür sein, daß die sogenannten "wirtschaftlichen" oder "kosten-optimalen" Testverfahren bisher noch keine praktische Bedeutung für Ordnungsmäßigkeitsprüfungen erlangt haben. Zudem setzen auch diese Pläne die Kenntnis der OC-Funktion voraus, stellen also letztlich eine Erweiterung der bisher dargestellten Konzepte voraus. Aus diesen Gründen soll im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausschließlich das Konzept einer Vorgabe zweier Fehleranteile θ_0 und θ_A und der an diesen Stellen zulässigen Risiken α und β zugrunde gelegt werden.

2.4 Einfache Annahmestichproben

Das einfache Annahmestichprobenverfahren, auch "Einfachtestverfahren", "einfaches Stichprobenverfahren" oder "Einfach-Stichprobenprüfung", im englischen "single sampling" genannt,¹ ist durch die folgende Stichprobenvorschrift gekennzeichnet: Aus dem Prüfungsfeld (der Grundgesamtheit) im Umfang von N Elementen wird zufällig eine Stichprobe im Umfang von n Elementen entnommen und geprüft.² Wenn die Anzahl x der gefundenen Fehler kleiner oder gleich der Annahmezahl c ist, wird das Prüfungsfeld als ordnungsmäßig angenommen (die Nullhypothese wird angenommen), wenn die Fehlerzahl x größer als die Annahmezahl c ist, wird das Prüfungsfeld abgelehnt (die Nullhypothese wird zurückgewiesen). Die Entscheidungsregel

¹ Vgl. SCHULTE, E., a.a.O., S. 119; Deutsche Arbeitsgemeinschaft für Statistische Qualitätskontrolle ... (Hrsg.), Begriffserläuterungen und Formelzeichen ..., a.a.O., S. 18; Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG 95 082 ..., Blatt 1, a.a.O., S. 6; European Organization for Quality Control (Hrsg.), Glossary of Terms ..., a.a.O., S. 112.

² Vgl. z. B. SCHULTE, E., a.a.O., S. 119 und die dort angegebene Literatur.

eines Einfachtests und mögliche Zufallswege sind in der folgenden Abbildung 2.5 dargestellt.¹

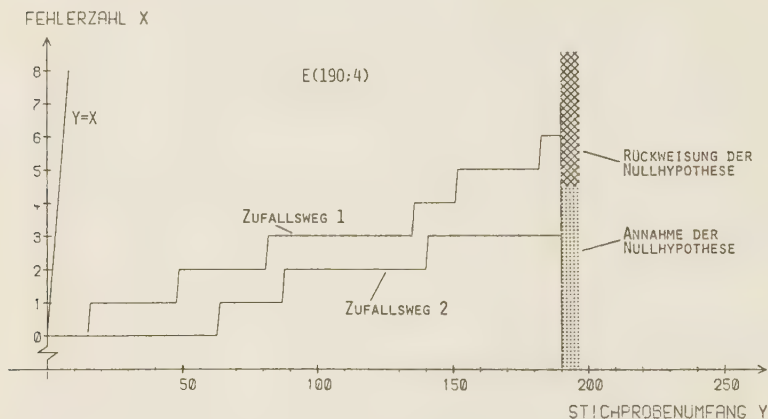


Abb. 2.5: Entscheidungsregel und mögliche Zufallswege einer einfachen Annahmestichprobe

Die Entscheidungsregel eines Einfachtests ist durch die zwei Parameter n und c eindeutig bestimmt. Jeder möglichen Entscheidungsregel ist für eine vorgegebene Stichprobenverteilung eindeutig ein bestimmter Verlauf der Annahmekennlinie (OC-Funktion, Operationscharakteristik) zugeordnet. Diese gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, höchstens c fehlerhafte Elemente in einer Stichprobe vom Umfang n zu finden, wenn der Fehleranteil der Grundgesamtheit den Wert θ besitzt.

Die Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe (Stichprobenverteilung), deren Kenntnis zur Berechnung der OC vorausgesetzt werden muß, ist unter anderem vom Entnahmeverfahren abhängig. Im Falle der Entnahme ohne Zurücklegen aus einer endlichen Grundgesamtheit vom Umfang N ist die

¹ In Anlehnung an SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 226 bzw. an HENGST, Martin, Einführung in die mathematische Statistik und ihre Anwendung. B.I-Hochschul Taschenbücher 42/42a, Mannheim 1967, S. 199.

Fehlerzahl in der Stichprobe hypergeometrisch verteilt, im Falle der Entnahme mit Zurücklegen oder Entnahme aus einer unendlichen Grundgesamtheit binomialverteilt.¹

Die Hypergeometrische Verteilung kann unter bestimmten Bedingungen durch die Binomialverteilung, die Poissonverteilung oder die Normalverteilung und die Binomialverteilung durch die Poisson- oder die Normalverteilung approximiert werden.² Die hierdurch bedingten Approximationsfehler bleiben klein, solange die angegebenen Approximationsregeln (Faustregeln) nicht verletzt werden.³ Welche dieser Verteilungen bei den für das Prüfungswesen typischen Fragestellungen am besten geeignet sind, soll im folgenden kurz diskutiert werden.

In der Prüfungspraxis wird im allgemeinen die Auswahl der Stichprobenelemente so vorgenommen, daß ein bestimmtes Element nur einmal in der Stichprobe enthalten ist, d. h. die Auswahl erfolgt ohne Zurücklegen.⁴ Wenn die Wahrscheinlichkeit für die Annahme eines konkreten Prüfungsfeldes vom Umfang N, das M fehlerhafte Elemente enthält, berechnet werden soll, liefert die Verteilungsfunktion der Hypergeometrischen Verteilung die exakte Lösung

$$OC_H(\theta) = F_H(c/N, n, M) = \sum_{x=0}^c \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (2.11)$$

1 Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 52 ff. und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. ebenda, S. 65 ff.; BLEYMÜLLER, Josef, GEHLERT, Günther, Statistische Formeln und Tabellen. München 1979, S. 34 f.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

3 Zur Herleitung solcher Approximationsregeln vgl. z. B. WETZEL, W., a.a.O., S. 95 ff.

4 Zur Technik der Zufallsauswahl vgl. z. B. SCHULTE, E., a.a.O., S. 49 ff. und die dort angegebene Literatur.

wobei $M = N\theta$ gilt. Der Fehleranteil θ kann in diesem Fall nur endlich viele Werte $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1$ annehmen.¹

Wenn das Prüfungsfeld selbst als Stichprobe aus einer übergeordneten unendlichen Grundgesamtheit anzusehen ist - der Fehleranteil im Prüfungsfeld ist dann binomialverteilt mit dem Erwartungswert θ - erhält man den exakten Wert der durchschnittlichen Annahmewahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Fehleranteil θ der übergeordneten Grundgesamtheit mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung als

$$OC_B(\theta) = F_B(c/n; \theta) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad (2.12)$$

der Fehleranteil θ ist in diesem Falle stetig.²

Die Unterscheidung zwischen der konkreten ("individuellen") und der "durchschnittlichen" Annahmewahrscheinlichkeit entspricht der von DODGE und ROMIG für Anwendungen in der statistischen Qualitätskontrolle vorgeschlagenen Trennung zwischen der "OC-Funktion vom Typ A" und der "OC-Funktion vom Typ B".³ Mit "Typ A" bezeichnen DODGE und ROMIG die Annahmekennlinie als Funktion des Fehleranteils eines konkreten Loses (Prüfungsfeldes), dieser Fehleranteil wird "Losqualität" ("lot quality") genannt. "Typ B" ist die Annahmekennlinie als Funktion des Fehler-

1 Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem HALD, A., The Determination of Single Sampling Attribute Plans with Given Producer's and Consumer's Risk. Technometrics 9 (1967), S. 402 ff.; vgl. auch UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 92 ff.; BLEYMÜLLER, GEHLERT, a.a.O., S. 26 f.

2 Vgl. HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 402 f.

3 Zu den folgenden Ausführungen vergleiche vor allem DODGE, Harold F., ROMIG, Harry G., Sampling Inspection Tables, Single and Double Sampling (2nd, revised and expanded ed.), New York, London, Sydney 1959, S. 56 ff.; auch DUNCAN, Acheson J., Quality Control and Industrial Statistics (3rd ed.), Homewood (Ill.) 1965, S. 147 ff.

anteils des (unendlichen) Produktionsprozesses, aus dem das zu prüfende Los stammt; dieser Fehleranteil heißt "Prozeßqualität" oder "Prozeßdurchschnitt" ("process quality" bzw. "process average"). Zur Berechnung der OC-Funktion vom Typ A ist die Hypergeometrische Verteilung, bei Typ B die Binomialverteilung zugrunde zu legen.

Das hier dargestellte Modell kann sinngemäß auch auf den Fall der Ordnungsmäßigkeitsprüfung übertragen werden. Wenn das Prüfungsfeld als abgeschlossene Einheit interpretiert wird, dessen konkreter Fehleranteil getestet werden soll, ist die Hypergeometrische Verteilung die exakt anzuwendende Verteilung. Wenn dagegen das Prüfungsfeld selbst als Zufallsauswahl aus einer übergeordneten Gesamtheit interpretiert und Hypothesen über den für dieses Prüfungsfeld zu erwartenden Fehleranteil getestet werden sollen, ist die Binomialverteilung die exakte Verteilung. Der konkrete Fehleranteil im Prüfungsfeld kann von dem (langfristig) zu erwartenden Fehleranteil zufallsbedingt abweichen.¹

Die Interpretation der Fehlerhypothesen θ_0 und θ_A als "individuelle" oder "zu erwartende" (durchschnittliche) Fehleranteilswerte bestimmt also darüber, ob die Hypergeometrische oder die Binomialverteilung die exakte Verteilung des Fehleranteils in der Stichprobe ist.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll, soweit nicht ausdrücklich anders vermerkt, die Binomialverteilung als Stichprobenverteilung unterstellt werden. Ein Grund hierfür ist, daß die Hypergeometrische Verteilung, die drei Parameter N , M und n besitzt, schlecht tabelliert und auch relativ aufwendig zu berechnen ist.² Ein weiterer

¹ Vgl. HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 402 ff.

² Eine kleine Tabelle der Wahrscheinlichkeits- und der Verteilungsfunktion der Hypergeometrischen Verteilung geben BLEYMÖLLER, GEHLERT, a.a.O., S. 112 ff.; sehr umfangreiche Tabellen geben LIEBERMANN, Gerald J., OWEN, Donald B., Tables of the Hypergeometric Distribution. Stanford (Calif.) 1961.

Grund ist, daß beim Test individueller (konkreter) Fehleranteile die Binomialverteilung mit den Parametern n und $\theta = \frac{M}{N}$ eine konservative Approximation der Hypergeometrischen Verteilung liefert, so daß auch vom Prüfungsziel her nichts gegen die Verwendung der Binomialverteilung spricht.

Konservative Approximation bedeutet, daß die tatsächlichen Risiken eines Fehlers erster und zweiter Art kleiner oder gleich, aber nicht höher als die approximativ berechneten Risiken sein können. Die approximativ mit Hilfe der Binomialverteilung berechnete OC-Funktion $OC_B(\theta)$ verläuft unter der Voraussetzung, daß die Annahmezahl c größer als null ist, flacher als die mit Hilfe der Hypergeometrischen Verteilung exakt berechnete $OC_H(\theta)$; zwischen beiden Funktionen existiert genau ein Schnittpunkt.¹

Die durch die Approximation bedingten Abweichungen sind dann relativ klein, wenn der Auswahlatz $\frac{n}{N}$ klein ist, Faustregel: $\frac{n}{N} < 0,05$.²

Als weitere Vereinfachung wird in der Literatur zum betrieblichen Prüfungswesen manchmal die Approximation der Hypergeometrischen bzw. der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung mit dem Parameter $\mu = n \cdot \theta = n \cdot \frac{M}{N}$ empfohlen.³ Diese Approximation eignet sich vor allem für kleine Fehleranteile θ , wie sie bei Ordnungsmäßigkeitsprüfungen charakteristisch sind; die Approximationsfehler sind

1 Den Beweis für diese in der Literatur mehrfach, z. B. von HAMAKER geäußerte Vermutung gibt UHLMANN, W., Vergleich der hypergeometrischen mit der Binomial-Verteilung. Metrika 10 (1966), S. 145 ff., 156 f.

2 Vgl. z. B. BLEYMÖLLER, GÖLICHER, GEHLERT, a.a.O., S. 55.

3 Vgl. z. B. SCHULTE, E., a.a.O., S. 124; SMITH, T.M.F., a.a.O., S. 180 ff.; CYERT, R.M., Test-checking and the Poisson Distribution - A further comment. Accounting Review 32 (1957), S. 395 ff.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

klein, wenn ausgehend von der Hypergeometrischen Verteilung die Bedingungen $\frac{n}{N} < 0,05$; $n > 10$ und $\theta = \frac{M}{N} < 0,05$ bzw. ausgehend von der Binomialverteilung die Bedingungen $n > 10$ und $\theta < 0,05$ erfüllt sind.¹

Die Approximation der Binomial- oder der Hypergeometrischen Verteilung durch die Poissonverteilung ist ebenfalls wieder konservativ, da die mit Hilfe der Poissonverteilung berechnete OC-Funktion

$$OC_P(\theta) = F_P(c/n\theta) = \sum_{x=0}^c \frac{(n\theta)^x}{x!} e^{-n\theta} \quad (2.13)$$

flacher als die mit Hilfe der Binomialverteilung berechnete $OC_B(\theta)$ und damit auch flacher als die exakte $OC_H(\theta)$ verläuft.² Eine vergleichende Darstellung der für einen vorgegebenen Einfachtest mit Hilfe der Hypergeometrischen, Binomial- und Poissonverteilung berechneten Verläufe der OC-Funktion gibt die folgende Abbildung 2.6.

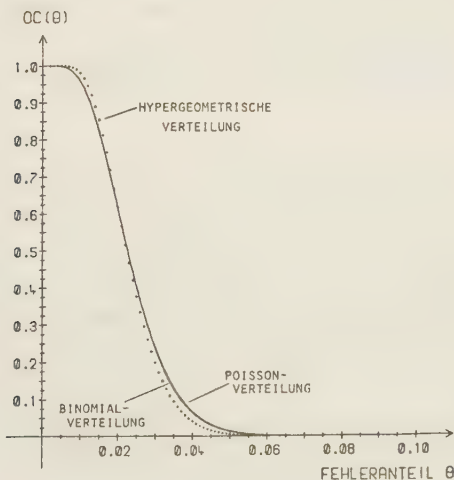


Abb. 2.6: OC des Einfachtests E(250,5) für verschiedene Verteilungsannahmen (N = 1000)

1 Vgl. BLEYMÜLLER, GEHLERT, a.a.O., S. 34 f.

2 Den Beweis hierfür gibt unter der Voraussetzung $c > 0$ und $n > c+1$ VOGT, H., Vergleich zweier Operationscharakteristiken. Metrika 20 (1973), S. 116 ff.

Die Approximation durch die Normalverteilung, die in einigen Lehrbüchern zum Prüfungswesen empfohlen wird,¹ ist nur für relativ große Stichprobenumfänge bzw. relativ große Fehleranteile θ anwendbar. Als Faustregel gilt $n \cdot \theta \cdot (1-\theta) > 9$.² Zudem ist für kleine Stichproben die Berücksichtigung der sogenannten Stetigkeitskorrektur erforderlich, da die Normalverteilung stetig, die bisher dargestellten theoretischen Verteilungen jedoch diskret sind. Vor allem bei kleinen Fehleranteilen θ sind relativ hohe Approximationsfehler zu erwarten, insbesondere dann, wenn wie bei den im folgenden Abschnitt und in den Kapiteln drei und vier darzustellenden Verfahren schon bei kleinen Stichprobenumfängen Aussagen über das Prüfungsfeld möglich sein sollen. Aus diesen Gründen soll die Normalverteilung in dieser Arbeit nicht zur Approximation der Fehlerzahl in der Stichprobe verwendet werden.

Wie im Abschnitt 2.3 dieser Arbeit dargestellt worden ist, sollen der tolerable Fehleranteil θ_0 und der nicht tolerable Fehleranteil θ_A und die zulässigen Risiken α und β als vorgegeben unterstellt werden. Zu bestimmen ist ein Einfachtest, dessen OC-Funktion die Bedingungen (2.3) und (2.4)

$$OC(\theta_0) \geq 1 - \alpha$$

und

$$OC(\theta_A) \leq \beta$$

erfüllt. Für eine vorgegebene Stichprobenverteilung gibt es im allgemeinen endlich viele Tests, die diese Bedin-

¹ Vgl. z. B. LEFFSON, U., a.a.O., S. 174 ff. und 181 f.; WYSOCKI, K. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 102 ff.; ders., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 94 ff. und die jeweils angegebene Literatur.

² Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 65 ff. und die dort angegebene Literatur.

gungen erfüllen, und aus denen dann ein "optimaler" Test ausgewählt werden muß.¹

Wenn die Poissonverteilung als Stichprobenverteilung unterstellt wird, können ausgehend von einer Beziehung zwischen den Verteilungsfunktionen der Poisson- und der Chi-Quadrat-Verteilung²

$$F_P(x/\mu) = 1 - F_{CH}(2\mu/2(x+1)) \quad (2.14)$$

die beiden oben angegebenen Bedingungen zu

$$n \leq \frac{\chi^2_{\alpha; \nu}}{2 \cdot \theta_0} \quad (\nu = 2(c+1)) \quad (2.15)$$

und

$$n \geq \frac{\chi^2_{1-\beta; \nu}}{2 \cdot \theta_A} \quad (\nu = 2(c+1)) \quad (2.16)$$

umgeformt werden.³ Dabei bedeuten $\chi^2_{1-\beta}$ und χ^2_{α} die kritischen Werte (Quantile, Fraktile) der Chi-Quadrat-Verteilung mit $\nu = 2(c+1)$ Freiheitsgraden; diese kritischen Werte sind in zahlreichen Tabellensammlungen und Standardwerken tabelliert.⁴

1 Im Falle einer stetigen Stichprobenverteilung, z. B. der Normalverteilung, können die "größer gleich" bzw. "kleiner gleich" Zeichen durch Gleichheitszeichen ersetzt werden; in diesem Fall gibt es genau einen Einfachtest, der diese Bedingungen erfüllt. Zur Herleitung eines solchen Tests vgl. z. B. LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 51 ff. und S. 70; LEFFSON, U., a.a.O., S. 181 ff.

2 Vgl. GRAF, HENNING, STANGE, Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik (2., völlig neu bearb. Aufl.), Berlin, Heidelberg, New York 1966, S. 10; MÜLLER, P. Heinz, NEUMANN, Peter, STORM, Regina, Tafeln der mathematischen Statistik (2., verb. Aufl.), München, Wien 1977, S. 62.

3 Vgl. HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 405 und die dort angegebene Literatur.

4 Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, a.a.O., S. 136 f.; GRAF, HENNING, STANGE, a.a.O., S. 292 f.; MÜLLER, NEUMANN, STORM, a.a.O., S. 125 f.; HARTER, H. Leon, A new table of percentage points of the chi-square distribution, Biometrika 51 (1964), S. 233 ff.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

Zulässig sind alle Einfachtests $E(n;c)$ mit ganzzahligen Parametern n und c , die diese beiden Bedingungen erfüllen. Die Bestimmung solcher Einfachtests kann durch Verwendung spezieller Tabellen, in denen die Funktionen

$$m_{1-\alpha}(c) = \frac{1}{2} \cdot X_{\alpha; 2(c+1)}^2 \quad (c \geq 0) \quad (2.17)$$

$$m_{\beta}(c) = \frac{1}{2} \cdot X_{1-\beta; 2(c+1)}^2 \quad (c \geq 0) \quad (2.18)$$

und eventuell die Hilfsfunktion

$$R(c/\alpha; \beta) = \frac{m_{\beta}(c)}{m_{1-\alpha}(c)} \quad (2.19)$$

für ausgewählte Kombinationen von α und β tabelliert sind, weiter vereinfacht werden.¹ Da diese Verfahren jedoch in der Literatur ausführlich erläutert werden,² sollen sie im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter dargestellt werden.

Für die beiden Beispiele

1) $\theta_0=0,01$; $\theta_A=0,05$; $\alpha=\beta=0,05$ und

2) $\theta_0=0,01$; $\theta_A=0,05$; $\alpha=0,05$; $\beta=0,02$

erhält man im Poissonmodell, ausgehend von den Bedingungen (2.15) und (2.16) die in der Tabelle 2.2 und in der Abbildung 2.7 dargestellten zulässigen Kombinationen von n und c .³ Für das Beispiel (1) führen alle Tests mit Annahmezah-

1 Eine solche Tabelle wurde erstmals von CAMERON entwickelt, vgl. CAMERON, J.M., Tables for constructing and for computing the operation characteristics of single-sampling plans. Industrial Quality Control 9 (1952), S. 37 ff. (zitiert bei HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 405).

2 Vgl. z. B. HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 404 ff.; Mc RAE, T.W., a.a.O., S. 261 ff.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 92 ff.; GRANT, Eugene L., Statistical Quality Control (3rd ed.), New York u. a. 1964, S. 357 ff. und die dort angegebene Literatur. Einen anderen als den oben beschriebenen Tabellenaufbau findet man bei SMITH, T.M.F., a.a.O., S. 181 ff.; DUNCAN, A.J., a.a.O., S. 154 ff.; COWDEN, Dudley J., Statistical Methods in Quality Control, Englewood Cliffs (N.J.) 1957, S. 531 ff.; sowie der jeweils dort angegebenen Literatur.

3 Die der Berechnung zugrunde liegenden kritischen Werte der Chi-Quadrat-Verteilung sind entnommen aus BLEYMÜLLER, GEHLERT, a.a.O., S. 136 f.

len kleiner oder gleich 3 zu unzulässigen Fehlerrisiken, für das Beispiel (2) alle Tests mit Annahmezahlen kleiner oder gleich 4. Unzulässige Kombinationen erkennt man daran, daß die durch die Bedingung (2.17) definierte Untergrenze $n_{\min}$ größer als die durch die Bedingung (2.16) definierte Obergrenze $n_{\max}$ ist oder daß das Intervall $[\underline{n}_{\min}, \underline{n}_{\max}]$ keinen ganzzahligen Wert n enthält.¹

Annahme- zahl	Intervalle für den Stichprobenumfang n	
	Beispiel (1)	Beispiel (2)
≤ 3	-	-
4	$[\underline{184}, \underline{197}]$	-
5	$[\underline{211}, \underline{261}]$	$[\underline{241}, \underline{261}]$
6	$[\underline{237}, \underline{328}]$	$[\underline{269}, \underline{328}]$
7	$[\underline{263}, \underline{396}]$	$[\underline{297}, \underline{396}]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tab. 2.2: Zulässige Einfachtests zu ausgewählten Beispielen im Poissonmodell

Wie man sieht, nimmt die Breite des Intervalls zulässiger Stichprobenumfänge mit wachsender Annahmezahl c zu. Optimal kann jedoch nur ein Test sein, bei dem die Annahmezahl den kleinstmöglichen Wert besitzt.² Im Beispiel (1) kann also nur einer der Tests mit $184 \leq n \leq 197$ und $c=4$ und im Beispiel (2) nur einer der Tests mit $241 \leq n \leq 261$ und $c=5$ optimal sein; welcher Test zu wählen ist, ist anhand zusätzlicher Kriterien zu entscheiden.

1 Vgl. HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 405 und S. 408.

2 Vgl. ebenda, S. 401 ff.

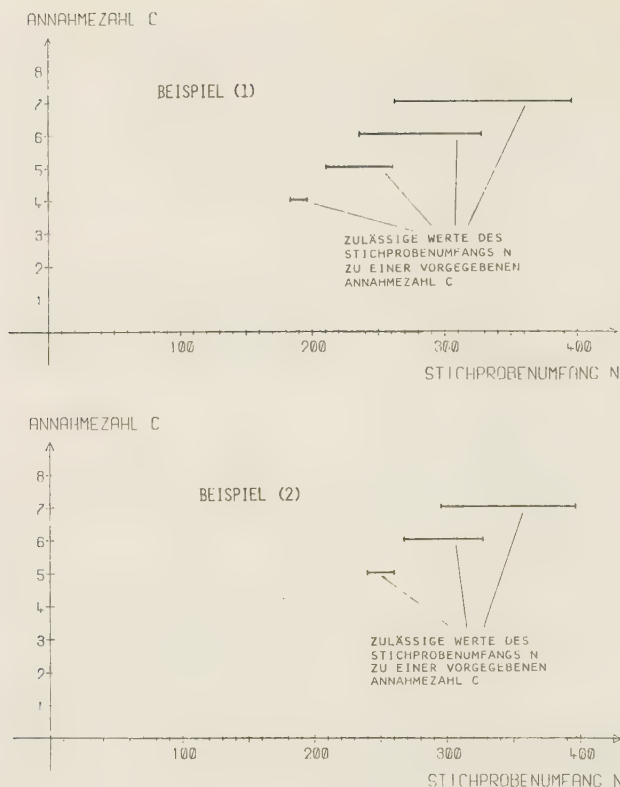


Abb. 2.7: Zulässige und optimale Einfachtests zu ausgewählten Beispielen im Poissonmodell

Falls der kleinste zulässige Stichprobenumfang $n_{\min}$ gewählt wird, sind die Abweichungen zwischen den vorgegebenen und den tatsächlichen Risiken beim β -Fehler sehr klein und beim α -Fehler sehr groß; wenn der größte zulässige Stichprobenumfang $n_{\max}$ gewählt wird, ist es genau umgekehrt.¹ Allgemein gilt, daß für eine vorgegebene Annahmezahl c mit steigendem Wert für n ($n \leq n_{\max}$) die Differenz zwischen dem zulässigen Wert α und dem tatsächlichen Risiko $1-OC(\theta_0)$ abnimmt und die Differenz zwischen

¹ Vgl. HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 406 ff.; DUNCAN, A.J., a.a.O., S. 155 f.

dem zulässigen Wert β und dem tatsächlichen Risiko $OC(\theta_A)$ zunimmt; bei sinkendem Wert für n verhält es sich umgekehrt. Die bei den Extremen $E(n_{\min};c)$ und $E(n_{\max};c)$ im Poissonmodell für die beiden Beispiele berechneten Verläufe der OC-Funktionen sind in der Abbildung 2.8 dargestellt.

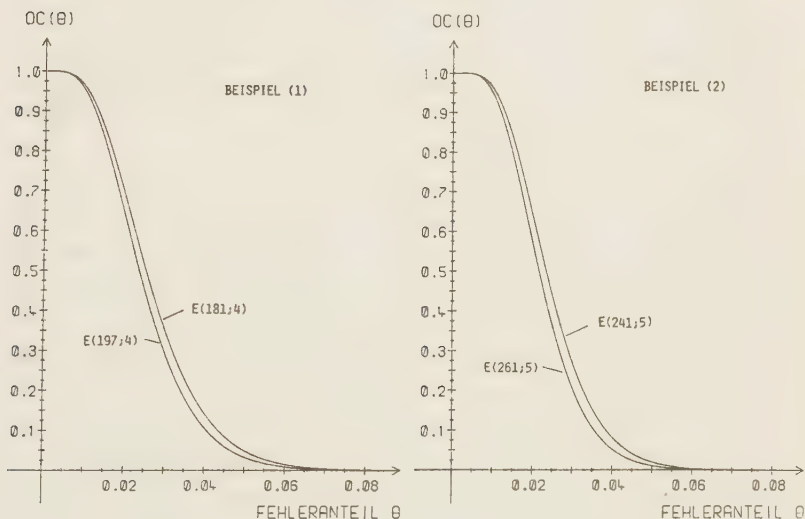


Abb. 2.8: OC-Funktionen verschiedener optimaler Einfachtests im Poissonmodell

Die bei der Bestimmung eines geeigneten Einfachtests auftretenden Probleme und die dabei oft bestehenden Wahlmöglichkeiten sind deshalb so ausführlich dargestellt worden, weil, wie im vierten Kapitel dieser Arbeit zu zeigen sein wird, ähnliche Probleme auch beim Folgetest (Sequentialtest) bei qualitativen Merkmalen auftreten können. Für den Charakter dieses Problems ist es unerheblich, ob die Poissonverteilung oder eine andere diskrete Verteilung, z. B. die Binomial- oder Hypergeometrische Verteilung als Stichprobenverteilung unterstellt wird.

Bisher wurde ausschließlich die Bestimmung zulässiger Einfachtests ausgehend von der Poissonapproximation der Stichprobenverteilung dargestellt, da dies das einfachste und in der Literatur meistgenannte Verfahren ist. Die Bestimmung zulässiger Tests ausgehend von dem Modell der Binomial- oder der Hypergeometrischen Verteilung ist demgegenüber wesentlich aufwendiger und oft nur iterativ möglich.¹ In einer neueren Veröffentlichung empfiehlt HALD die Verwendung spezieller Approximationen, die wie die (exakte) Lösung im Poissonmodell auf den kritischen Werten der Chi-Quadrat-Verteilung bzw. auf den in (2.17) und (2.18) definierten Funktionen aufbauen.²

In den beiden hier dargestellten Beispielen stimmen die mit den von HALD (1977) angegebenen Approximationsformeln berechneten Werte mit den exakten Lösungen im Binomialmodell überein. Die für das Poisson- und für das Binomialmodell errechneten Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle 2.3 nebeneinander dargestellt.³

Beispiel	Poissonmodell		Binomialmodell	
	n	c	n	c
Beispiel (1)	$\lfloor 184, 197 \rfloor$	4	$\lfloor 181, 198 \rfloor$	4
Beispiel (2)	$\lfloor 241, 261 \rfloor$	5	$\lfloor 237, 262 \rfloor$	5

Tab. 2.3: Optimale Einfachtests bei Annahme einer Poisson- bzw. einer Binomialverteilung

1 Vgl. vor allem HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 408 ff. und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. HALD, Anders, A Note on the Determination of Attribute Sampling Plans of Given Strength. Technometrics 19 (1977), S. 211 ff., sowie die dort angegebene Literatur.

3 Die exakten Lösungen im Binomialmodell wurden mit Hilfe eines programmierbaren Taschenrechners vom Typ TI-59 durch "trial and error", ausgehend von den im Poissonmodell gefundenen Lösungen, bestimmt.

Die hier angegebenen Ergebnisse bestätigen, daß die Poissonverteilung eine konservative Approximation der Binomialverteilung ist; denn "konservativ" bedeutet, daß jeder Test mit einer Annahmezahl c größer als Null, der im Poissonmodell zulässige Fehlerrisiken aufweist, auch bei Rechnung mit der Binomialverteilung ein zulässiger Test sein muß. Bei vorgegebener Annahmezahl $c > 0$ können im Binomialmodell der kleinstmögliche Stichprobenumfang $n_{\min}$ nicht größer und der größtmögliche Stichprobenumfang $n_{\max}$ nicht kleiner als die entsprechenden Werte im Poissonmodell sein.¹

Wie man sieht, sind die Abweichungen der beiden Lösungen in den hier definierten Beispielen sehr gering und rechtfertigen kaum den bei Annahme der Binomialverteilung wesentlich höheren Rechenaufwand. Größere Abweichungen würden sich nur dann ergeben, wenn bei Rechnung mit der Binomialverteilung eine kleinere Annahmezahl c zulässig ist als bei Rechnung mit der Poissonverteilung. Durch Vergleich verschiedener Approximationsregeln findet HALD, daß die Annahmezahl c im Binomialmodell durchschnittlich 10 % niedriger als im Poissonmodell ist.² Da nur ganzzahlige Werte für c zulässig sind, werden die Annahmezahlen beider Modelle in den meisten Fällen übereinstimmen und sich nur in wenigen Fällen unterscheiden.³ Auf dieses Problem soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden, da das den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

1 Diese Aussagen gelten analog auch für die oben dargestellte Approximation der Hypergeometrischen Verteilung durch die Poissonverteilung, die ebenfalls eine konservative Approximation ist; vgl. S. 36 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 411.

3 Ein Beispiel für einen Test mit je nach Stichprobenverteilung unterschiedlichen Annahmezahlen gibt HALD; vgl. ebenda, S. 414 f.

Als Grundlage für einen Vergleich des Einfachtestverfahrens (einfachen Annahmestichprobenverfahrens) mit den in den folgenden Abschnitten dieser Arbeit darzustellenden Verfahren sollen aus den hier berechneten Tests zwei "mittlere" Tests, nämlich $E(190;4)$ für das Beispiel (1) und $E(250;5)$ für das Beispiel (2) ausgewählt werden.

2.5 Möglichkeiten zu einer effektiveren Stichprobenauswertung

2.5.1 Vorbemerkung

Das bisher dargestellte Einfachtestverfahren (einfache Annahmestichprobenverfahren) ist durch eine vom Wesen her statische Vorgehensweise gekennzeichnet: Die Auswertung beginnt erst nach Abschluß der Entnahme, und der Stichprobenumfang wird so gewählt, daß auch im ungünstigsten Fall die Mindestanforderungen erfüllt werden, d. h. daß die zulässigen Fehlerrisiken nicht überschritten werden. Mit dieser Auswertungsregel können Situationen, die schon bei kleineren Stichprobenumfängen - bei Einhaltung der zulässigen Risiken eines Fehlers erster bzw. zweiter Art - eine Entscheidung zugunsten der Nullhypothese H_0 oder der Alternativhypothese H_A zulassen würden, nicht erkannt werden.

In diesem Abschnitt der Arbeit sind zwei Konzepte darzustellen, die in gewisser Weise als "Vorläufer" des in den Kapiteln drei und vier zu behandelnden Folgetestverfahrens aufgefaßt werden können, nämlich das Prinzip des "abgebrochenen Tests" ("curtailed sampling") und die "Doppel-Stichprobenprüfung" ("double sampling"). Beide Verfahren sind dadurch gekennzeichnet, daß der erforderliche Stichprobenumfang vor Beginn der Entnahme nicht feststeht, sondern zufallsabhängig ist.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es allgemein üblich, Zufallsvariable durch große Buchstaben und die entsprechenden Ausprägungen (konkreten Werte) von Zufallsvariablen durch kleine Buchstaben vom Ende des Alphabets zu kennzeichnen. Zudem sind in dieser Arbeit die Symbole N und n bereits für den Umfang der Grundgesamtheit bzw. den Umfang der Stichprobe beim Einfachtest belegt. Aus diesem Grunde sollen in dieser Arbeit der Stichprobenumfang, wenn es sich dabei um eine Zufallsvariable handelt, durch das Symbol Y und ein konkreter Wert des Stichprobenumfangs durch das Symbol y bezeichnet werden.¹

Auch in den folgenden Abschnitten soll unterstellt werden, daß der tolerable Fehleranteil θ_0 und der nicht tolerable Fehleranteil θ_A sowie die zulässigen Risiken eines α - und eines β -Fehlers vorgegeben sind. Als Maß für den Erhebungsaufwand soll zunächst, wie bereits auf Seite 16 dieser Arbeit festgestellt wurde, die Kurve des durchschnittlich erforderlichen Stichprobenumfangs (ASN-Kurve, average sample number function) verwendet werden. Die Werte der ASN-Funktion eines Tests entsprechen den Erwartungswerten $E(Y/\theta)$ des Stichprobenumfangs für vorgegebene Fehleranteils-²werte θ .

1 Die gleiche Symbolik verwendet z.B. COHEN, A. Clifford, Curtailed Attribute Sampling, Technometrics 12 (1970), S. 295 ff..

2 Vgl. z.B. BLEYMÖLLER, GEHLERT, GÖLICHER, a.a.O., S. 42 ff. und S. 48.

2.5.2 Abgebrochene Stichprobenentnahme (Curtailed Sampling)

Die "abgebrochene Stichprobenentnahme", auch "abgebrochene Kontrolle", im englischen "curtailed sampling" oder "truncated sampling" genannt,¹ ist in ihrer einfachsten Form durch die folgende Stichprobenvorschrift gekennzeichnet: Aus dem Prüfungsfeld (der Grundgesamtheit) im Umfang von N Elementen werden zufällig Elemente ausgewählt und sofort geprüft. Sobald die Anzahl der gefundenen Fehler größer als die Annahmehzahl c ist, wird das Prüfungsfeld abgelehnt; wenn nach der Prüfung von n Elementen die Zahl der gefundenen Fehler kleiner oder gleich c ist, wird das Prüfungsfeld als ordnungsmäßig angenommen. Diese Stichprobenvorschrift und mögliche Zufallswege sind in der Abbildung 2.9 grafisch dargestellt.

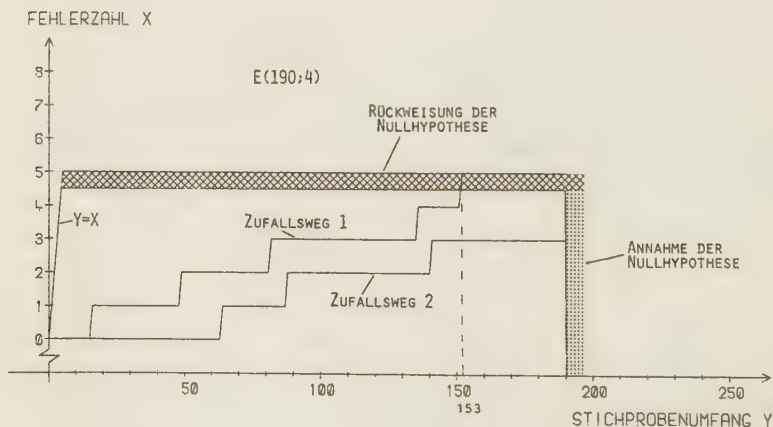


Abb. 2.9: Entscheidungsregel und mögliche Zufallswege einer abgebrochenen einfachen Annahmestichprobe

¹ Vgl. UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 116 ff.; HALD, Anders, MÖLLER, Uffe, The ASN Function for Curtailed Single Sampling by Attributes, Technometrics 18 (1976), S. 307 ff.; CRAIG, C.C., The Average Sample Number for Truncated Single and Double Attributes Acceptance Sampling Plans, Technometrics 10 (1968), S. 685 ff.

Die oben beschriebene Stichprobenvorschrift müßte nach der in der englischsprachigen Literatur entwickelten Terminologie als "semi curtailed single sampling" (wörtlich übersetzt: "halb abgebrochene Einfachstichprobe") bezeichnet werden. Der Begriff "single" zeigt an, daß diese Stichprobenvorschrift ausgehend von dem auf den Seiten 31 ff. dieser Arbeit dargestellten einfachen Annahmestichprobenverfahren ("single sampling") entwickelt wurde und ebenfalls durch die zwei Parameter n und c gekennzeichnet ist. In analoger Weise kann, wie im folgenden Punkt 2.5.3 und im vierten Kapitel dieser Arbeit darzustellen sein wird, das Konzept des "curtailed sampling" auch auf Doppeltestverfahren (Doppel-Stichprobenprüfungen) und auf bestimmte Folgetestverfahren übertragen werden.

"Semi curtailed sampling" bedeutet, daß ein Abbruch nur erfolgt, wenn die gefundene Anzahl fehlerhafter Elemente größer als die Annahmezahl c ist, Bedingung

$$x \geq c+1 \quad (y=c+1, c+2, \dots, n) \quad (2.20),$$

wenn also die Nullhypothese zurückgewiesen wird.¹

Dagegen bedeutet "fully curtailed sampling", daß zusätzlich hierzu ein Abbruch auch dann erfolgt, sobald die Anzahl fehlerfreier Elemente $(y-x)$ in der Stichprobe mindestens gleich der Anzahl der für eine Annahme der Null-

¹ Diese Unterscheidung geht zurück auf: Statistical Research Group, Columbia University, Sampling Inspection; Principles, Procedures and Tables for Single, Double and Sequential Sampling in Acceptance Inspection and Quality Control Based on Percent Defective, Ed. by H.A. FREEMAN, M. FRIEDMAN, F. MOSTELLER, W.A. WALLIS, New York, London 1948, S. 28 u. 211 ff.. Vgl. außerdem z. B. HALD, MÖLLER, a.a.O., S. 307 ff.; SHAH, D.K., PHATAK, A.G., A Simplified Form of the ASN for a Curtailed Sampling Plan, Technometrics 14 (1972), S. 925 ff.; GUENTHER, William C., Sampling Inspection in Statistical Quality Control, London, High Wycombe 1977, S. 9 ff.

hypothese erforderlichen Zahl fehlerfreier Elemente ($n-c$)
ist, Bedingung

$$y-x \geq n-c \quad (2.21)$$

oder

$$x \leq y-n+c \quad (y=n-c, n-c+1, \dots, n). \quad (2.22)$$

Diese Unterscheidung findet man jedoch nicht bei allen Autoren: So verwenden zum Beispiel COHEN, WETHERILL und GHOSH den Begriff "curtailed sampling" ausschließlich im Sinne von "fully curtailed sampling",¹ wogegen in der Literatur zur Statistischen Qualitätskontrolle die Darstellung oft auf das Konzept des "semi curtailed sampling" beschränkt wird.² Ein Grund für die Eingrenzung auf das Modell des "semi curtailed sampling" ist, daß die Überprüfung der Bedingungen (2.21) oder (2.22) relativ aufwendig ist und eine ständige Neuberechnung der "Annahmezahl" $y-n+c$ erfordert, daß jedoch die hierdurch möglichen Einsparungen sehr gering sind: Eine vorzeitige Annahme der H_0 ist frühestens beim Stichprobenumfang $n-c$ möglich. Zudem werden auch die Formeln zur Berechnung der ASN-Funktion beim "fully curtailed sampling" wesentlich komplizierter als im anderen Fall.³

Aus den hier genannten Gründen soll auch in dieser Arbeit nur das Konzept des sogenannten "semi curtailed sampling" berücksichtigt werden, das einen Abbruch der Entnahme nur in dem Fall, daß die Zahl der gefundenen Fehler in der Stichprobe die Annahmezahl überschreitet, zuläßt. Die für

1 Vgl. COHEN, A. Clifford, a.a.O., S. 295 ff.; WETHERILL, G. Barrie, Sequential Methods in Statistics (2nd ed.), London, New York 1975, S. 4 ff.; GHOSH, B.K., Sequential Tests of Statistical Hypotheses, Reading (Mass.), Menlo Park, London, Don Mills 1970, S. 78 f.

2 Vgl. z. B. BURR, Irving W., Elementary Statistical Quality Control, New York, Basel 1979, S. 242 f.; CRAIG, C.C., a.a.O., S. 685 ff.

3 Vgl. GUENTHER, William C., The Average Sample Number for Truncated Double Sample Attribute Plans, Technometrics 13 (1971), S. 811 ff.

die "abgebrochene Kontrolle" beim Einfachtest gültige Stichprobenvorschrift ist bereits auf Seite 48 dieser Arbeit dargestellt worden.

Die wichtigsten Eigenschaften der "abgebrochenen Kontrolle" beim Einfachtest sollen im folgenden kurz hergeleitet werden. Dazu wird unterstellt, daß die zu testenden Hypothesen $H_0: \theta = \theta_0$ und $H_A: \theta = \theta_A$ ($\theta_A > \theta_0$) sich auf zu erwartende Fehleranteile beziehen und somit die Binomialverteilung die exakte Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe ist.¹ Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zufallsweg in einem Punkt $P(x, n)$ ($x=0, 1, \dots, c$) im "Annahmebereich" der Nullhypothese endet, ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung als

$$f_B(x/n; \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad (x=0, 1, \dots, c; c < n) \quad (2.23)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zufallsweg in einem Punkt $P(d, y)$ ($y=d, d+1, \dots, n$) mit $d=c+1$ im "Rückweisungsbe-
reich" der Nullhypothese endet, ist durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion der sogenannten "Negativen Binomialverteilung"

$$f_{NB}(y/d; \theta) = \binom{y-1}{d-1} \theta^d (1-\theta)^{y-d} \quad (y=d, d+1, \dots, n) \quad (2.24)$$

gegeben.²

1 Vgl. die Seiten 34 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem CRAIG, C.C., a.a.O., S. 686; COHEN, A.Cl., a.a.O., S. 296; PATIL, G.P., On the Equivalence of the Binomial and Inverse Binomial Acceptance Sampling Plans and an Acknowledgement, Technometrics 5 (1963), S. 120; GUENTHER, W.C., The Average Sample Number ..., a.a.O., S. 811.
In manchen Veröffentlichungen wird die hier angegebene Verteilung als "Pascalverteilung" bezeichnet, vgl. z. B. HASTINGS, N.A.J., PEACOCK, J.B., Statistical Distributions, London 1974, S. 28 f. und S. 106 f.; KENDALL, Maurice G., STUART, Alan, The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1: Distribution Theory (3rd ed.), London, High Wycombe 1969, S. 130.

Der Wert der Annahmekennlinie dieser Stichprobenvorschrift für einen vorgegebenen Fehleranteilswert θ ist definiert als Wert der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

$$OC(\theta) = \sum_{x=0}^c f_B(x/n; \theta) = F_B(c/n; \theta) ; (0 < \theta < 1) \quad (2.25)$$

analog ist das Komplement der Annahmekennlinie als Wert der Verteilungsfunktion der Negativen Binomialverteilung

$$1-OC(\theta) = \sum_{y=d}^n f_{NB}(y/d; \theta) = F_{NB}(n/d; \theta) \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.26)$$

definiert.

Beweise dafür, daß sich die beiden in den Gleichungen (2.25) und (2.26) angegebenen Verteilungsfunktionen tatsächlich zu 1 ergänzen, daß also die Bedingung

$$F_B(c/n; \theta) + F_{NB}(n/d; \theta) = 1 \quad (d=c+1 \leq n; 0 < \theta < 1) \quad (2.27)$$

in jedem Fall erfüllt ist, geben PATIL und SHAH, PHATAK.¹

Diese Herleitung bestätigt, daß die OC-Funktion bei abgebrochener Kontrolle exakt mit der OC-Funktion einer einfachen Annahmestichprobe mit den gleichen Parametern n und c übereinstimmt. Für beliebige Zufallswege führen die einfache Annahmestichprobe (Einfachtest) $E(n, c)$ und die abgebrochene Kontrolle mit den gleichen Parametern n und c immer zu den gleichen Entscheidungen.²

¹ Vgl. PATIL, G.P., On the Evaluation of the Negative Binomial Distribution with Examples, Technometrics 2 (1960), S. 501 ff. (zitiert bei PATIL, G.P., On the Equivalence ..., a.a.O., S. 120); SHAH, PHATAK, a.a.O., S. 926.

² Diese Aussagen gelten nur für nicht negative Ausprägungen der Zufallsvariablen X ; diese Bedingung ist jedoch bei der Annahmeprüfung anhand qualitativer Merkmale immer erfüllt, da die Anzahl von Fehlern in der Stichprobe nicht negativ sein kann.

Der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang Y bei abgebrochener Kontrolle kann nicht größer, wohl aber erheblich kleiner als der Stichprobenumfang n der entsprechenden einfachen Annahmestichprobe sein. Der Erwartungswert des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs, der hier als ASN (average sample number, vgl. Seite 16 dieser Arbeit) abgekürzt werden soll, ist bei abgebrochener Kontrolle als

$$\text{ASN}(\theta) = E(Y/\theta) = n \sum_{x=0}^c f_B(x/n; \theta) + \sum_{y=d}^n y f_{NB}(y/d; \theta) \quad (d=c+1 < n; 0 < \theta < 1) \quad (2.28)$$

definiert.¹ Nach einigen Umformungen, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden soll, findet man²

$$\text{ASN}(\theta) = n \cdot F_B(c/n; \theta) + \frac{d}{\theta} \cdot (1 - F_B(d/n+1; \theta)) \quad (d=c+1 < n; 0 < \theta < 1) \quad (2.29)$$

oder nach weiteren Umformungen³

$$\text{ASN}(\theta) = (n - \frac{d}{\theta}) F_B(c/n; \theta) + \frac{d}{\theta} [1 - (1-\theta) f_B(d/n; \theta)] \quad (d=c+1 < n; 0 < \theta < 1) \quad (2.30).$$

Die Formel (2.29) besitzt den Vorteil, daß die Beiträge der Annahme- und der Rückweisungsentscheidungen zur ASN-Funktion getrennt ausgewiesen werden, was eine eventuell gewünschte Erweiterung auf das Konzept des "fully curtailed sampling" erleichtern würde, erfordert jedoch die Berechnung der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung für die Parameterkombinationen $(n; \theta)$ und $(n+1; \theta)$. Bei der Formel (2.30) ist nur eine Parameterkombination $(n; \theta)$

1 Vgl. PHATAK, A.G., BHATT, N.M., Estimation of the Fraction Defective in Curtailed Sampling Plans by Attributes. Technometrics 9 (1967), S. 226.

2 Vgl. ebenda, S. 226; HALD, MØLLER, a.a.O., S. 307 und die dort angegebene Literatur.

3 Vgl. CRAIG, C.C., a.a.O., S. 687; SHAH, PHATAK, a.a.O., S. 927; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 118 f.

zugrunde zu legen, jedoch sind die Beiträge der verschiedenen Entscheidungen zur ASN-Funktion nicht unterschieden. Aus diesem Grunde soll hier als Kompromiß zur Berechnung der ASN-Funktion die Beziehung

$$\text{ASN}(\theta) = n \cdot F_B(c/n; \theta) + d \left[\bar{F}_B(d/n; \theta) + \frac{1}{\theta} (1 - F_B(d/n; \theta)) \right] \\ (d = c+1 < n; 0 < \theta < 1) \quad (2.31)$$

die aus (2.30) sehr einfach abgeleitet werden kann, verwendet werden. Hierin gibt der erste Summand den Beitrag derjenigen Zufallswege zur ASN-Funktion an, die zu einer Annahme der H_0 führen, und der zweite Summand den Beitrag der Zufallswege, die zu einer Rückweisung der H_0 führen.

Die hier dargestellten Formeln vereinfachen sich geringfügig, wenn man eine Poissonverteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe unterstellt.¹ Da diese Vereinfachung jedoch immer einen Approximationsfehler beinhaltet, soll darauf an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden.

Sinnvoller scheint, vor allem in Hinblick auf die in Punkt 2.5.3 dieser Arbeit darzustellende abgebrochene Doppelstichprobenprüfung die folgende Vorgehensweise zu sein: Der Beitrag der Rückweisungsentscheidungen zum Wert der ASN-Funktion, also zum Erwartungswert des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs, wird als Funktion $E_R(d/n; \theta)$ bezeichnet.

Die ASN-Funktion des abgebrochenen Einfachtests kann dann, wenn zusätzlich die Beziehung (2.25) berücksichtigt wird, auch als

$$\text{ASN}(\theta) = n \cdot OC(\theta) + E_R(d/n; \theta) \quad (2.32)$$

¹ Vgl. HALD, MØLLER, a.a.O., S. 307 ff.

geschrieben werden, wobei die Funktion $E_R(d/n;\theta)$ durch

$$E_R(d/n;\theta) = \begin{cases} d & \text{für } d \geq 1; \theta = 1 \\ \sum_{y=d}^n y \cdot f_{NB}(y/d;\theta) & \text{für } d \geq 1; 0 < \theta < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.33)$$

definiert ist.

Zur Berechnung von $E_R(d/n;\theta)$ besser geeignet sind die aus den Beziehungen (2.29) und (2.31) hergeleiteten Bestimmungsgleichungen

$$E_R(d/n;\theta) = \frac{d}{\theta}(1-F_B(d/n+1;\theta)) \quad (d \geq 1; 0 < \theta < 1) \quad (2.34)$$

oder

$$E_R(d/n;\theta) = d \left[\bar{F}_B(d/n;\theta) + \frac{1}{\theta}(1-F_B(d/n;\theta)) \right]. \quad (2.35)$$

Wenn die Werte der OC-Funktion eines Einfachtests bekannt sind, ist mit Hilfe einer Tabelle der Funktion $E_R(d/n;\theta)$ eine sehr einfache und schnelle Berechnung der Werte der ASN-Funktion bei der abgebrochenen Einfachstichprobe ("semi curtailed single sampling") möglich.

Die Technik zur Berechnung von Werten der ASN-Funktion soll im folgenden für die beiden im Abschnitt 2.4 dieser Arbeit eingeführten Einfachtests $E(190;4)$ und $E(250;5)$ kurz demonstriert werden. Für den Fehleranteil θ sollen in Anlehnung an die im dritten Kapitel dieser Arbeit darzustellenden Rechenbeispiele die fünf Werte 0; 0,01; 0,025; 0,05 und 1,0 verwendet werden.² Der Wert $\theta = 0,025$ stimmt ungefähr mit dem Prüfungspunkt $\theta_{0,5}$ des Einfachtestes $E(190;4)$ überein; die übrigen Werte entsprechen

1 Eine solche Tabelle ist für ausgewählte Werte von d , n und θ im Anhang dieser Arbeit abgedruckt.

2 Abgesehen von einer geringen Abweichung bei $\theta = 0,025$ entsprechen diese fünf Werte genau den Fehleranteilen, für die eine sehr einfache näherungsweise Bestimmung von Punkten der OC- und ASN-Funktion passender Folgetests möglich ist.

den Hypothesenwerten θ_0 und θ_A bzw. den Grenzen des Definitionsbereiches von θ .

In der folgenden Tabelle 2.4 sind einige Zwischenergebnisse und die resultierenden Werte der ASN-Funktion für die beiden Beispiele angegeben.¹

Beispiel	θ	$OC(\theta)$	$n \cdot OC(\theta)$	$E_R(d/n; \theta)$	$ASN(\theta)$
E(190;4) d=5 n=190	0,0	1,0	190,00	0,00	190,00
	0,010	0,9568	181,79	6,52	188,31
	0,025	0,4837	91,89	68,82	160,71
	0,050	0,0368	6,99	91,93	98,92
	1,0	0,0	0,00	5,00	5,00
E(250;5) d=6 n=250	0,0	1,0	250,00	0,00	250,00
	0,010	0,9588	239,70	8,39	248,09
	0,025	0,4040	100,99	105,20	206,19
	0,050	0,0131	3,27	116,34	119,61
	1,0	0,0	0,00	6,00	6,00

Tab. 2.4: Ausgewählte Werte der OC- und ASN-Funktion von Einfachtests bei abgebrochener Kontrolle

Die Kurven des durchschnittlichen Stichprobenumfangs (ASN-Funktionen) zu den im Abschnitt 2.4 dieser Arbeit ausgewählten Einfachtests E(190;4) und E(250;5) bei abgebrochener Kontrolle sowie die entsprechenden OC-Funktionen sind in der folgenden Abbildung 2.10 dargestellt. Man erkennt, daß mit zunehmendem Fehleranteil in der Grundgesamtheit (im Prüfungsfeld) auch die bei abgebrochener Kontrolle gegenüber der einfachen Annahmestichprobe möglichen durchschnittlichen Einsparungen zunehmen.

¹ Die Werte der OC-Funktion sind mit Hilfe eines vom Verfasser erstellten Programmes auf einem programmierbaren Rechner vom Typ Texas Instruments TI-59 berechnet worden. Für $\theta=0$ oder $\theta=1$ erhält man die Werte der Funktion $E_R(d/n; \theta)$ aus der Beziehung (2.33); die übrigen Werte sind aus der im Anhang dieser Arbeit abgedruckten Tabelle dieser Funktion entnommen.

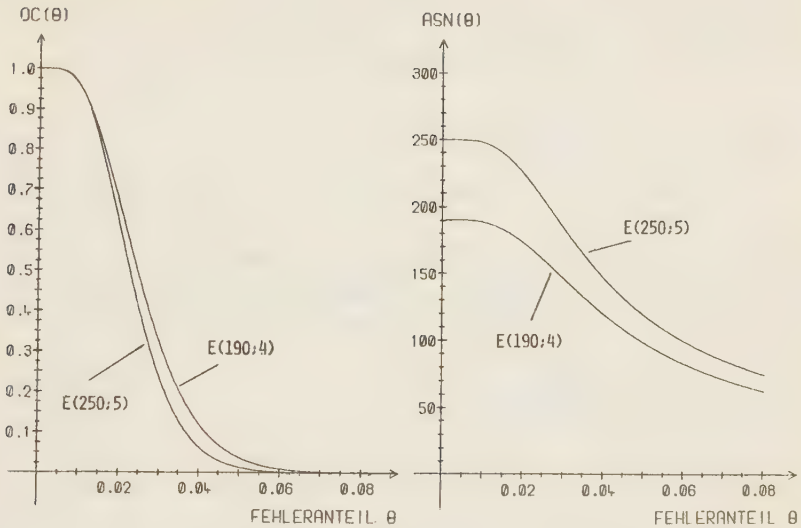


Abb. 2.10: OC-Funktionen und ASN-Funktionen der Einfachtests $E(190;4)$ und $E(250;5)$ bei abgebrochener Kontrolle

Durch das Konzept der abgebrochenen Kontrolle beim Einfachtest sind ohne großen organisatorischen Aufwand erhebliche (durchschnittliche) Einsparungen beim Stichprobenumfang möglich. Dennoch ist dieses Konzept in der deutsch- und englischsprachigen Literatur zum wirtschaftlichen Prüfungswesen praktisch unbekannt.

Ein Grund hierfür mag sein, daß in vielen älteren Standardwerken zum Prüfungswesen oder zur Statistischen Qualitätskontrolle von einer Anwendung dieses Konzepts beim Einfachtest oder bei der ersten Stichprobe eines Doppel- oder Mehrfachtestverfahrens¹ ausdrücklich abgeraten wurde mit

¹ Ein Mehrfachtestverfahren ("multiple sampling") ist aus dem im nächsten Kapitel dieser Arbeit darzustellenden Folgetest (Sequentialtest) abgeleitet und durch eine Entnahme in Gruppen konstanten Umfangs sowie durch eine feste Abbruchgrenze gekennzeichnet. Beispiele hierfür finden sich in einigen älteren der im fünften Kapitel dieser Arbeit darzustellenden Stichprobensysteme.

dem Hinweis darauf, daß bei abgebrochener Kontrolle ein erwartungstreuer Schätzwert für den Fehleranteil in der Grundgesamtheit nicht bestimmt werden könne.¹

Richtig ist, daß der übliche Schätzwert

$$\hat{\theta} = p = \frac{x}{n} \quad (x=0,1,\dots,n) \quad (2.36)$$

für den Fall, daß der Zufallsweg den Rückweisungsbereich erreicht und somit zu einem Abbruch der Entnahme führt, verzerrt, d. h. nicht erwartungstreu ist. In diesem Fall kann man jedoch den aus dem Modell des "inverse sampling" hergeleiteten Schätzwert

$$\hat{\theta} = \frac{d-1}{y-1} \quad (y=d,d+1,\dots) \quad (2.37)$$

als erwartungstreuen Schätzwert verwenden.²

Als erwartungstreuen Schätzwert für den Fehleranteil θ in der Grundgesamtheit (im Prüfungsfeld) erhält man also bei dem abgebrochenen Einfachtest ("semi curtailed single sampling")³

¹ Vgl. z. B. VANCE, NETER, a.a.O., S. 79; GRANT, E.L., a.a.O., S. 417 ff.; COWDEN, D.J., a.a.O., S. 547 f.

² Die Stichprobenvorschrift des sogenannten "inverse sampling" lautet: entnimm und prüfe solange jeweils ein weiteres Stichprobenelement, bis d fehlerhafte Elemente gefunden wurden; y ist die Zahl der entnommenen Elemente. Beweise dafür, daß der oben angegebene Schätzwert erwartungstreu ist, geben HALDANE, J.B.S., On a Method of Estimating Frequencies, Biometrika 33 (1945), S. 222 und KENDALL, Maurice G., STUART, Alan, The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2: Interference and Relationship (3rd ed.), London 1973, S. 613.

³ Vgl. z. B. GIRSHICK, M.A., MOSTELLER, Frederick, SAVAGE, L.J., Unbiased Estimates for Certain Binomial Sampling Problems with Applications. AMS 17 (1946), S. 19 f.; Statistical Research Group, Columbia University, Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 117; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 58.

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{bei Annahme der } H_0 \\ & (x=0,1,\dots,c), \\ \frac{d-1}{y-1} = \frac{c}{y-1} & \text{bei Rückweisung der } H_0 \\ & (y=d,d+1,\dots,n). \end{cases} \quad (2.38)$$

Das in den oben aufgeführten älteren Veröffentlichungen gegen das Konzept der abgebrochenen Kontrolle (curtailed sampling) vorgebrachte Argument ist somit hinfällig geworden. Eine Schätzung des Fehleranteils ist zudem nur erforderlich, wenn man eine Auswahl eines geeigneten Tests abhängig von Vorinformationen plant.¹

Als Ergebnis ist festzuhalten, daß der hier dargestellte abgebrochene Einfachtest ("semi curtailed single sampling") gegenüber der einfachen Annahmestichprobe erhebliche (durchschnittliche) Einsparungen ermöglichen kann, ohne wesentliche Nachteile aufzuweisen. Dieser abgebrochene Einfachtest ist die einfachste Form einer schrittweisen (sequentiellen) Stichprobenvorschrift.² Als weitere Verfahren mit einer schrittweisen Stichprobenvorschrift sind im folgenden Punkt 2.5.3 die Doppelstichprobenprüfung und im anschließenden dritten Kapitel der Folgetest (sequentieller Verhältnistest) nach A. WALD darzustellen.

2.5.3 Doppelstichprobenprüfung (Double Sampling)

Die Doppelstichprobenprüfung, auch "Doppeltestverfahren", "Doppelt-Stichprobenprüfung", "Zweifache" oder "Zweistufige Stichprobe", im englischen "double sampling" genannt, ist durch die folgende Stichprobenvorschrift gekennzeichnet-

1 Vgl. die Ausführungen auf den Seiten 21 f. und 28 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. z. B. WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 4 ff.; KENDALL, STUART, The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2 ..., a.a.O., S. 612 ff.

net:¹ Aus einer Grundgesamtheit vom Umfang N wird eine Stichprobe im Umfang n_1 entnommen und geprüft. Ist die Anzahl der Fehler in dieser Stichprobe kleiner oder gleich der Annahmehzahl c_1 , wird die Nullhypothese H_0 angenommen, ist sie größer oder gleich der Rückweizezahl d_1 , wird H_0 zurückgewiesen (abgelehnt). Liegt die Fehlerzahl zwischen diesen Grenzen, wird eine zweite Stichprobe vom Umfang n_2 entnommen und geprüft. Ist die Gesamtzahl der Fehler in beiden Stichproben kleiner oder gleich der Annahmehzahl c_2 , wird H_0 angenommen, sonst wird H_0 zurückgewiesen.² Diese Stichprobenvorschrift und mögliche Zufallswege sind in der folgenden Abbildung 2.11 in Form eines sogenannten "Schirmdiagramms" dargestellt.³

1 Vgl. zu diesen Ausführungen z. B. SCHULTE, E., a.a.O., S. 120; VANCE, NETER, a.a.O., S. 46 ff.; DODGE, ROMIG, a.a.O., S. 21 ff.; HENGST, M., a.a.O., S. 203 ff.; GRÄF, HENNING, STANGE, a.a.O., S. 199 ff.; SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 57 ff. und S. 224 ff.; HAMAKER, CHABOT, WILLEMZE, a.a.O., S. 370 ff.; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 119 ff.; Deutsche Gesellschaft für Qualität (DGQ) e.V. (Hrsg.), Stichprobentabellen zur Attributprüfung (nach DIN 40080), Erläuterungen und Handhabung (5. Aufl.), Berlin, Köln, Frankfurt/M. 1973, S. 19 ff.; Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG 95082 ..., Blatt 2: Anwendung der Prüfpläne für Stichprobenprüfung, Köln 1968, S. 8 f.

2 Die Symbole n_1 und n_2 werden im überwiegenden Teil der Literatur einheitlich benutzt, während für die Annahme- und Rückweizeahlen eine Vielfalt von Symbolen in Gebrauch ist, auf die jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.

3 Die Bezeichnung "Schirmdiagramm" geht zurück auf HAMAKER; vgl. HAMAKER, H.C., a.a.O., S. 268 f.; vgl. auch UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 120; SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 226; HENGST, M., a.a.O., S. 205.

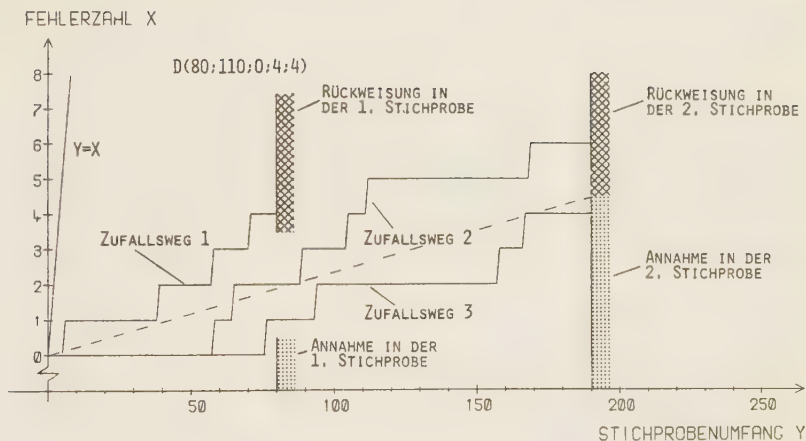


Abb. 2.11: Stichprobenvorschrift und mögliche Zufallswege einer Doppelstichprobenprüfung ("Schirmdiagramm")

Eine Doppelstichprobe ist durch insgesamt fünf Parameter gekennzeichnet, nämlich durch die Umfänge n_1 und n_2 der ersten und zweiten Teilstichprobe, die Annahme- und Rückweisezahlen c_1 und d_1 der ersten Teilstichprobe und die Annahmezahl c_2 der kombinierten Stichprobe. Die Rückweisezahl der kombinierten Stichprobe ist als $d_2 = c_2 + 1$ definiert. Zur Kennzeichnung einer Doppelstichprobe soll hier das Symbol $D(n_1; n_2; c_1; c_2; d_1)$ verwendet werden.

Aus der Abbildung 2.11 erkennt man unmittelbar, daß die Bedingung

$$d_1 > c_1 + 1 \quad (2.39)$$

erfüllt sein muß, weil sonst die Wahrscheinlichkeit für die Entnahme einer zweiten Stichprobe null ist. Ebenso müssen die Bedingungen

$$c_2 > c_1 \quad (2.40)$$

und

$$d_2 \geq d_1 \quad (2.41)$$

erfüllt sein, weil sonst ausgehend von allen bzw. von mindestens einem der Punkte $P(x; n_1)$ ($x=c_1+1, \dots, d_1-1$) mit der Wahrscheinlichkeit von 1 die Rückweisung der Nullhypothese H_0 erfolgen würde. In einem solchen Fall wäre die Entnahme einer zweiten Stichprobe überflüssig und unwirtschaftlich.

Als weitere Bedingungen an eine effiziente Doppelstichprobe sind von HAMAKER und VAN STRIK

$$c_1+0,5 < \frac{n_1}{n_1+n_2}(c_2+0,5) \quad (2.42)$$

und

$$d_1-0,5 < \frac{n_1}{n_1+n_2}(c_2+0,5) \quad (2.43)$$

gefunden worden.¹ Diese Bedingungen bedeuten, daß die Ursprungsgerade durch den Punkt $P(c_2+0,5; n_1+n_2)$ - in der Abbildung 2.11 gestrichelt eingezeichnet - oberhalb des Punktes $P(c_1+0,5; n_1)$ und unterhalb des Punktes $P(d_1-0,5; n_1)$ verlaufen muß, wenn der entsprechende Doppeltest effizient sein soll. Effizient bedeutet hier, daß ein vorgegebener Verlauf der OC-Funktion mit einem möglichst geringen (durchschnittlichen) Stichprobenumfang erreicht werden soll.

Der Wert der Annahmekennlinie (OC-Funktion) für einen bestimmten Fehleranteilswert θ setzt sich zusammen aus den Annahmewahrscheinlichkeiten in der ersten und in der zweiten Stichprobe. Wenn die Binomialverteilung als Verteilung des Fehleranteils in der Stichprobe unterstellt werden kann, erhält man

¹ Vgl. HAMAKER, H.C., VAN STRIK, R., The Efficiency of Double Sampling for Attributes. JASA 50 (1955), S. 830 ff.; vgl. auch UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 120.

$$OC(\theta) = F_B(c_1/n_1; \theta) + \sum_{x=c_1+1}^{d_1-1} f_B(x/n_1; \theta) \cdot F_B(c_2-x/n_2; \theta) \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.44)$$

als Funktion der OC.¹ Hierin stehen $f_B(x/n; \theta)$ für die Wahrscheinlichkeitsfunktion und $F_B(x/n; \theta)$ für die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung, wobei

$$F_B(x/n; \theta) = 0 \quad \text{für alle } x < 0 \quad (2.45)$$

gilt.

Zur Vereinfachung der im folgenden darzustellenden Formeln zur Berechnung der ASN-Funktion sollen die Wahrscheinlichkeit für Annahme in der ersten Stichprobe mit W_1 und die Wahrscheinlichkeit für Annahme in der zweiten Stichprobe mit W_2 bezeichnet werden. Damit erhält man

$$OC(\theta) = W_1 + W_2 \quad (2.46)$$

mit

$$W_1 = W_1(\theta) = F_B(c_1/n_1; \theta) \quad (2.47)$$

und

$$W_2 = W_2(\theta) = \sum_{x=c_1+1}^{d_1-1} f_B(x/n_1; \theta) \cdot F_B(c_2-x/n_2; \theta) \quad (2.48)$$

für die OC-Funktion einer Doppelstichprobe.

¹ Vgl. z. B. HAMAKER, H.C., a.a.O., S. 265; COWDEN, D.J., a.a.O., S. 543 ff.; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 121 ff.; SARKADI, K., VINCZE, I., Mathematical Methods of Statistical Quality Control, New York, London 1974, S. 304; DODGE, ROMIG, a.a.O., S. 33 f.; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 32 f.
Beispiele zur Berechnung von Werten der OC-Funktion findet man bei SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 40, und COWDEN, D.J., a.a.O., S. 543 ff.

Der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang bei der Doppelstichprobe ist eine Zufallsvariable Y , die bei der hier dargestellten Stichprobenvorschrift nur die zwei Werte n_1 und (n_1+n_2) annehmen kann. Der durchschnittlich entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang (Wert der ASN-Funktion) für einen vorgegebenen Fehleranteilswert θ ist definiert als¹

$$ASN_1(\theta) = n_1 + n_2 \cdot \sum_{x=c_1+1}^{d_1-1} f_B(x/n_1; \theta) \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.49)$$

oder

$$ASN_1(\theta) = n_1 + n_2 \cdot (F_B(d_1-1/n_1; \theta) - W_1) \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.50)$$

wobei W_1 die in Gleichung (2.47) definierte Wahrscheinlichkeit ist.

Die hier angegebene ASN-Funktion ist als $ASN_1(\theta)$ bezeichnet worden, um sie von den im folgenden darzustellenden Verläufen der ASN bei abgebrochener Doppelstichprobe ("curtailed double sampling") zu unterscheiden. Auch hier soll, wie bereits auf Seite 50 dieser Arbeit begründet wurde, nur die Möglichkeit eines Abbruches bei Erreichen der Rückweisungsgrenze der H_0 ("semi" curtailed sampling) berücksichtigt werden.² Die mit diesem Konzept maximal mögliche Einsparung erzielt man mit der folgenden Stichprobenvorschrift:

¹ Vgl. HAMAKER, H.C., a.a.O., S. 265; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 125; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 34; BURR, I.W., a.a.O., S. 239; COWDEN, D.J., a.a.O., S. 547.

² Die gleiche Einschränkung machen auch UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 126; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 34; CRAIG, C.C., a.a.O., S. 687 ff.; BURR, I.W., a.a.O., S. 242 f.

Aus einer Grundgesamtheit (einem Prüfungsfeld) im Umfang von N Elementen werden zufällig Elemente ausgewählt und sofort geprüft. Sobald innerhalb der ersten n_1 Elemente d_1 fehlerhafte gefunden werden, ist die Entnahme abzubrechen und die Nullhypothese zurückzuweisen. Die Entnahme ist ebenfalls abzubrechen, sobald in der zweiten Gruppe von (maximal) n_2 Elementen die Gesamtzahl der Fehler aus beiden Gruppen den Wert $d_2 = c_2 + 1$ erreicht. Die Bedingungen für Annahme der H_0 sind die gleichen wie auf Seite 60 f. dieser Arbeit dargestellt.

Diese Stichprobenvorschrift und mögliche Zufallswege sind in der folgenden Abbildung 2.12 wiedergegeben.

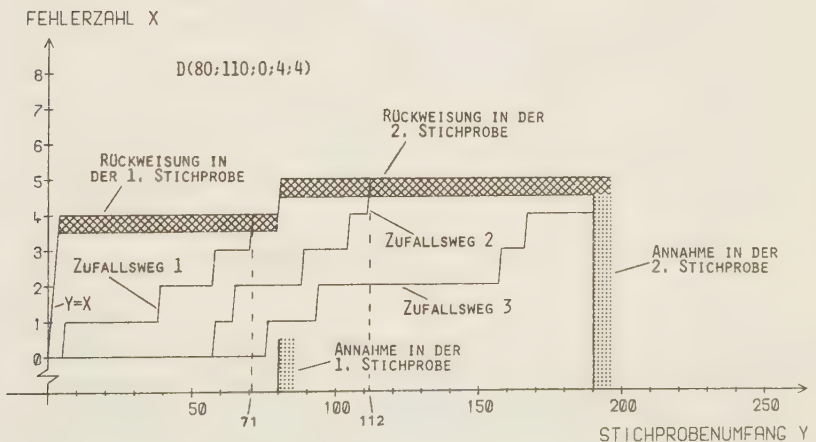


Abb. 2.12: Stichprobenvorschrift und mögliche Zufallswege einer abgebrochenen Doppelstichprobe

In der Literatur wird unter dem Begriff der abgebrochenen Doppelstichprobe (curtailed double sampling) nicht einheitlich die hier angegebene Stichprobenvorschrift verstanden. Sehr oft wird mit der bereits auf Seite 56 f. dieser Arbeit angegebenen Begründung ein Abbruch nur in der zweiten Teilstichprobe empfohlen; als erwartungstreuen Schätzwert für den Fehleranteil θ in der Grundgesamtheit erhält man, wenn die erste Teilstichprobe nicht abgebrochen wird:¹

$$\hat{\theta} = p = \frac{x_1}{n_1} \quad (2.51)$$

wobei x_1 hier die Anzahl der fehlerhaften Elemente in der ersten Teilstichprobe bezeichnet.

Falls jedoch ein Abbruch der ersten Teilstichprobe zugelassen wird, kann ein erwartungstreuer Schätzwert für θ aus der ersten Teilstichprobe als

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{d_1 - 1}{y - 1} & \text{bei Rückweisung der } H_0 \\ & (y = d_1, d_1 + 1, \dots, n_1) \\ \frac{x_1}{n_1} & \text{sonst } (x_1 = 0, 1, \dots, d_1 - 1) \end{cases} \quad (2.52)$$

bestimmt werden.² Eine erwartungstreue Schätzung aus den Ergebnissen beider Teilstichproben ist zwar theoretisch möglich, jedoch so rechenaufwendig, daß auf eine Darstellung des Verfahrens an dieser Stelle verzichtet werden soll.³

¹ Vgl. zusätzlich zu der auf Seite 58 dieser Arbeit angegebenen Literatur auch UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 126; Statistical Research Group, Columbia University, Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 33 und S. 104 f.; BURR, I.W., a.a.O., S. 243 ff.

² Vgl. Statistical Research Group, Columbia University, Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 105 und S. 117; GIRSHICK, MOSTELLER, SAVAGE, a.a.O., S. 20 f.

³ Die von GIRSHICK, MOSTELLER, SAVAGE für beliebige sequentielle Stichprobenverfahren (Folgetestverfahren) hergeleiteten erwartungstreuen Schätzfunktionen sind in diesem Fall anwendbar; vgl. GIRSHICK, MOSTELLER, SAVAGE, a.a.O., S. 13 ff.

Für den Verzicht auf einen Abbruch bereits in der ersten Teilstichprobe gibt es also keinen zwingenden Grund. Da jedoch das Konzept eines Abbruchs nur in der zweiten Teilstichprobe in der Literatur sehr stark vertreten wird, soll im folgenden auch der hieraus resultierende Verlauf der ASN-Funktion - hier als $ASN_2(\theta)$ bezeichnet - berücksichtigt werden. Im Anschluß daran ist die ASN für den Fall eines Abbruchs beider Teilstichproben - hier als $ASN_3(\theta)$ bezeichnet - darzustellen.

Analog zu dem in Punkt 2.5.2 dieser Arbeit hergeleiteten Ergebnis stimmen auch hier die OC-Funktionen des regulären und des in der zweiten oder in beiden Teilstichproben abgebrochenen Doppeltestverfahrens (Doppelstichprobenverfahrens) exakt überein.¹ Für alle drei hier genannten Konzepte ist die OC-Funktion also durch die Gleichungen (2.44) oder (2.46) bis (2.48) definiert. Da die Annahmewahrscheinlichkeiten der drei Varianten gleich sind und der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang bei abgebrochener Entnahme kleiner oder gleich, aber nicht größer als der entsprechende Umfang bei vollständiger Entnahme einer Stichprobe sein kann, muß

$$ASN_1(\theta) \geq ASN_2(\theta) \geq ASN_3(\theta) \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.53)$$

gelten.

Die Herleitung der Funktionen $ASN_2(\theta)$ und $ASN_3(\theta)$ ist relativ aufwendig und soll deshalb an dieser Stelle nicht nachvollzogen werden. Für den hier angenommenen Fall, daß der Fehleranteil in der Stichprobe binomialverteilt ist, findet UHLMANN:²

1 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 35.

2 Vgl. UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 128.

Eine teilweise andere Formel gibt CRAIG für den Spezialfall $d_1 = d_2 = c_2 + 1$; vgl. CRAIG, C.C., a.a.O., S. 691 f.

$$\begin{aligned}
 \text{ASN}_2(\theta) = & n_1 + n_2 \text{OC}(\theta) - n_2 \cdot \sum_{x=0}^{c_1} \binom{n_1}{x} \theta^x (1-\theta)^{n_1-x} + \\
 & + \sum_{x=c_1+1}^{d_1-1} (c_2-x+1) \binom{n_1}{x} \theta^{x-1} (1-\theta)^{n_1-x} \cdot \\
 & \cdot \left[1 - \sum_{k=0}^{c_2-x+1} \binom{n_2+1}{k} \theta^k (1-\theta)^{n_2+1-k} \right] \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

Diese Formel läßt sich vereinfacht als

$$\begin{aligned}
 \text{ASN}_2(\theta) = & n_1 + n_2 (\text{OC}(\theta) - F_B(c_1/n_1; \theta)) + \\
 & + \sum_{x=c_1+1}^{d_1-1} f_B(x/n_1; \theta) \cdot \frac{d_2-x}{\theta} (1 - F_B(d_2-x/n_2+1; \theta)) \\
 & (d_2=c_2+1 < n_1+n_2; 0 < \theta < 1) \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

schreiben, wobei $f_B(x/n; \theta)$ und $F_B(x/n; \theta)$ für die Wahrscheinlichkeits- bzw. Verteilungsfunktion der Binomialverteilung stehen.

Unter Verwendung der auf Seite 63 dieser Arbeit definierten Wahrscheinlichkeit W_2 und der auf Seite 55 definierten Funktion $E_R(d/n; \theta)$ kann (2.55) einfacher auch als

$$\text{ASN}_2(\theta) = n_1 + n_2 W_2 + \sum_{x=c_1+1}^{d_1-1} f_B(x/n_1; \theta) \cdot E_R(d_2-x/n_2; \theta) \quad (2.56)$$

geschrieben werden. Der erste Summand in dieser Gleichung gibt den Beitrag der ersten Teilstichprobe zur ASN-Funktion an, die beiden folgenden Summanden geben den Beitrag der zweiten Teilstichprobe zur ASN-Funktion an.

Falls auch in der ersten Teilstichprobe ein Abbruch der Entnahme bei Erreichen der Rückweisungsgrenze zugelassen wird, ist der erste Summand von (2.56) analog zu der auf den Seiten 53 f. dieser Arbeit für den verkürzten Einfachtest hergeleiteten Formel der ASN-Funktion durch $n_1 F_B(d_1 - 1/n_1; \theta) + E_R(d_1/n_1; \theta)$ zu ersetzen. Der erste Summand gibt dabei den Beitrag derjenigen Zufallswege zur ASN-Funktion an, die entweder zu einer Annahme der H_0 in der ersten Teilstichprobe oder zur Notwendigkeit einer zweiten Teilstichprobe führen. Der zweite Summand erfaßt den Beitrag der in der ersten Teilstichprobe abgebrochenen Zufallswege zur ASN-Funktion.

Man erhält also

$$\begin{aligned} \text{ASN}_3(\theta) = & n_1 \cdot F_B(d_1 - 1/n_1; \theta) + E_R(d_1/n_1; \theta) + \\ & + n_2 W_2 + \sum_{x=c_1+1}^{d_1-1} f_B(x/n_1; \theta) \cdot E_R(d_2 - x/n_2; \theta) \end{aligned} \quad (2.57)$$

als Gleichung der ASN-Funktion beim Doppeltest mit Abbruch in beiden Teilstichproben.

In der Literatur sind gleichbedeutende Formeln meines Wissens nur für den Spezialfall $d_1 = d_2 = c_2 + 1$ hergeleitet worden.¹ In diesem Spezialfall stimmt die hier angegebene Formel (2.57) mit den in der Literatur genannten Formeln überein, wie man durch geeignete Umformungen zeigen kann. Auf einen Beweis der Übereinstimmung bzw. auf eine Darstellung der in der Literatur überwiegend in Elementarschreibweise angegebenen Formeln² sei hier jedoch verzichtet, da das den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

¹ Vgl. CRAIG, C.C., a.a.O., S. 687 ff.; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 128 ff.; GUENTHER, W.C., The Average Sample Number ..., a.a.O., S. 811 ff.; ders., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 31 ff.

² Vgl. CRAIG, C.C., a.a.O., S. 691; GUENTHER, W.C., The Average Sample Number ..., a.a.O., S. 815; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 129 f.

Bedingt durch die relativ große Zahl von fünf Parametern gibt es bei der Doppelstichprobenprüfung im allgemeinen mehr Kombinationen $D(n_1; n_2; c_1; c_2; d_1)$ als bei der einfachen Annahmestichprobe, die die beiden Bedingungen (2.3) und (2.4) erfüllen. Eine Möglichkeit zur Bestimmung zulässiger Doppeltests besteht darin, aus einem der im fünften Kapitel dieser Arbeit darzustellenden Stichprobensysteme eine geeignete Parameterkombination auszuwählen. Auf die dabei auftretenden Probleme soll jedoch erst auf den Seiten 310 ff. dieser Arbeit eingegangen werden.

Andere Möglichkeiten zur Bestimmung eines zulässigen Doppeltests sollen, da das Doppeltestverfahren (Doppelstichprobenprüfung) nicht primär Gegenstand dieser Arbeit ist, nur am Rande gestreift werden. So haben DODGE und ROMIG ein Nomogramm entwickelt, aus dem abhängig vom Wert des sogenannten Prozeßdurchschnitts ("process average")¹ die Annahmekennzahlen eines "optimalen" Doppeltests bestimmt werden können.² Im nächsten Schritt können aus einem weiteren Nomogramm die entsprechenden Stichprobenumfänge n_1 und n_1+n_2 abgelesen werden; die Rückweisezahl d_1 ist als

$$d_1 = d_2 = c_2 + 1 \quad (2.58)$$

definiert.³

1 Der Prozeßdurchschnitt ist der Erwartungswert der sogenannten Fertigungsfunktion; vgl. S. 28 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Optimal im Sinne von DODGE, ROMIG ist ein Doppeltest, dessen OC-Funktion die Bedingung $OC(\theta_A) \leq 0,10$ erfüllt und der an der Stelle des Prozeßdurchschnitts im Vergleich mit möglichen anderen Tests den kleinsten durchschnittlichen Prüfaufwand besitzt. Der Prüfaufwand umfaßt neben dem Stichprobenumfang auch den im Fall einer Rückweisung voll zu prüfenden Rest der Grundgesamtheit vom Umfang N ; vgl. DODGE, ROMIG, a.a.O., S. 34 ff.

3 Vgl. ebenda, S. 38 f. und S. 23 f.

Unter der Voraussetzung, daß das Verhältnis der Stichprobenumfänge n_2 und n_1 konstant gehalten wird,

$$\frac{n_2}{n_1} = \text{const.} \quad (2.59)$$

ist auch die Konstruktion von Tabellen möglich, aus denen für vorgegebene Risiken eines α - und β -Fehlers zulässige Kombinationen von c_1 , c_2 , d_1 und n_1 sehr einfach bestimmt werden können,¹ vergleichbar dem bereits in Abschnitt 2.4 dieser Arbeit bei der einfachen Annahmestichprobe dargestellten Verfahren.² Auch in diesen Tabellen wird teilweise zum Zwecke einer weiteren Vereinfachung die Bedingung (2.58) unterstellt.

In fast allen einschlägigen Veröffentlichungen wird die Approximation der Stichprobenverteilung durch die Poissonverteilung vorgeschlagen, weil sich daraus rechentechnische Vorteile ergeben.³ Eine Ausnahme bildet MILLER, der ausgehend von der Binomialverteilung "optimale" Doppeltests bestimmt und tabelliert hat.⁴

Manche der hier angesprochenen Verfahren können von vornherein als nicht optimal ausgeschlossen werden, denn wie HAMAKER festgestellt hat, führt die Bedingung (2.58) dazu, daß die entsprechenden Doppeltests "vor allem an der Seite der schlechten Partien weniger zweckdienlich arbeiten",⁵

1 Vgl. DUNCAN, A.J., a.a.O., S. 171 ff.; McRAE, T.W., a.a.O., S. 264 f.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

2 Vgl. S. 39 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

3 Zu einer Erläuterung dieser Vorteile vgl. DUNCAN, A.J., a.a.O., S. 171 f.

4 Vgl. MILLER, Frederick J., Optimum Double Sampling Plans for the Binomial Case, Unpublished Master's Thesis, Univ. of Wyoming 1968 (zitiert bei GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 46 und S. 63).

5 HAMAKER, H.C., a.a.O., S. 269; vgl. auch HAMAKER, VAN STRIK, a.a.O., S. 842 ff.

d. h. daß sie im Falle hoher Fehleranteile einen unnötig hohen Stichprobenumfang erfordern. Diese Verfahren zur Konstruktion von Doppeltests führen auch dann nicht unbedingt zu einem optimalen Ergebnis, wenn die Zielvorstellung des Anwenders von der in der Literatur vorgegebenen Zielvorstellung abweicht.

In dieser Arbeit sollen zu den beiden auf Seite 40 angegebenen Beispielen Doppeltests so bestimmt werden, daß sie auf der einen Seite mit den in Abschnitt 2.4 ausgewählten Einfachtests und auf der anderen Seite mit den in den Kapiteln 3 und 4 darzustellenden Folgetests möglichst gut vergleichbar sind. So soll einerseits der maximale Stichprobenumfang n_1+n_2 möglichst klein, andererseits der Doppeltest möglichst effizient sein. Unter Berücksichtigung der oben angegebenen Ergebnisse soll hier zusätzlich zu den bereits auf der Seite 62 dieser Arbeit angegebenen Bedingungen (2.42) und (2.43)

$$d_1 < d_2 \quad (2.60)$$

gefordert werden. Für das Verhältnis der Stichprobenumfänge soll als Kompromiß zwischen den Forderungen nach einem geringen Gesamtstichprobenumfang und hoher Effizienz

$$\frac{n_2}{n_1} > 1 \quad (2.61)$$

gelten.¹ Als zusätzliche Bedingung sollten der Einfachheit halber n_1 und n_2 ohne Rest durch 10 teilbar sein.

Die Bestimmung von im Sinne der oben definierten Bedingungen optimalen Doppeltests - im allgemeinen werden zu einem vorgegebenen Beispiel mehr als eine Lösung existieren - ist mit Hilfe eines "trial and error"-Suchverfahrens relativ einfach möglich.² Ausgangspunkt ist der für das ent-

1 HAMAKER und VAN STRIK empfehlen einen Wert von 2, d. h. $n_2=2 n_1$; vgl. HAMAKER, VAN STRIK, a.a.O., S. 846.

2 Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 39 ff.

sprechende Beispiel optimale Einfachtest mit dem kleinstmöglichen Stichprobenumfang $E(n_{\min}; c)$.¹ Für den Gesamtstichprobenumfang und die Annahmezahl der kombinierten Stichproben beim Doppeltest müssen die Bedingungen

$$c_2 \geq c \quad (2.62)$$

und

$$n_1 + n_2 \geq n_{\min} \quad (2.63)$$

erfüllt sein.² Mit zunehmendem Wert von n_1 werden ceteris paribus die zulässigen Werte von n_2 immer kleiner, gleichzeitig wird auch der Wert der Summe $n_1 + n_2$ immer kleiner, und umgekehrt.³

Bei Verwendung eines Computers betragen die im "trial and error"-Suchverfahren erforderlichen Rechenzeiten nur Bruchteile von Sekunden.⁴ Zu den beiden Beispielen erhält man

$$D(80; 110; 0; 4; 4) \quad \text{zu Beispiel (1)}$$

und

$$D(100; 150; 0; 5; 4) \quad \text{zu Beispiel (2)}$$

als im Sinne der oben angegebenen Kriterien optimale Doppeltests.

Dieses Ergebnis ist insofern erstaunlich, als in beiden Beispielen die Annahmezahlen der kombinierten Stichprobe und die Gesamtstichprobenumfänge exakt mit den Annahmezahlen und den Stichprobenumfängen der zu diesen Beispielen

1 Zur Bestimmung dieses Einfachtests vgl. S. 39 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 40.

3 Vgl. ebenda, S. 40 f.

4 Die Berechnungen wurden auf der IBM 3032 des Rechenzentrums der WWU Münster durchgeführt, die Datenein- und -ausgabe erfolgte über ein Terminal (Datensichtgerät) im VSPC-System.

ausgewählten Einfachtests $E(190;4)$ bzw. $E(250;5)$ übereinstimmen. In diesem Fall bedeutet das, daß zu jedem beliebigen Zufallsweg der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang beim Doppeltest kleiner oder gleich wie beim entsprechenden Einfachtest ist. Falls ein Abbruch nicht zugelassen wird, muß in diesem Fall

$$ASN_1(\theta) \leq n \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.64)$$

gelten, bei abgebrochener Stichprobe muß hier

$$ASN_3(\theta) \leq ASN_C(\theta) \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.65)$$

sein. Auf der anderen Seite läßt sich zeigen, daß die tatsächlichen Risiken eines α - und β -Fehlers beim Doppeltest den vorgegebenen Risiken besser angepaßt sind als beim entsprechenden Einfachtest. Die Verläufe der OC-Funktion der beiden hier bestimmten Doppeltests sind in der folgenden Abbildung 2.13 dargestellt.¹

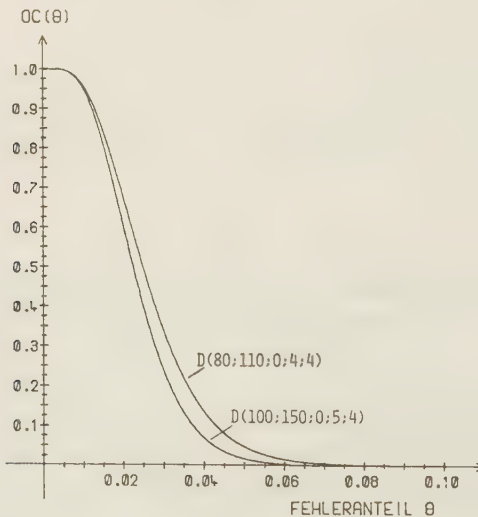


Abb. 2.13: OC-Funktionen ausgewählter Doppeltests

¹ Auf eine differenzierte Darstellung, aus der zusätzlich die Wahrscheinlichkeiten für Annahme bzw. Rückweisung der H_0 bereits nach der ersten Stichprobe abgelesen werden können, sei hier aus Vereinfachungsgründen verzichtet; vgl. hierzu z. B. DUNCAN, A.J., a.a.O., S. 165; GRANT, E.L., a.a.O., S. 346.

Die ASN-Funktionen der beiden Doppeltests für die hier dargestellten drei Varianten:

- 1: ohne Abbruch der Entnahme,
- 2: mit Abbruch nur in der zweiten Stichprobe,
- 3: mit Abbruch in beiden Stichproben

sind in der folgenden Abbildung 2.14 dargestellt. Man erkennt deutlich, daß schon bei nicht abgebrochener Entnahme gegenüber dem Stichprobenumfang bei einfacher Annahmestichprobe (gestrichelt eingezeichnet) erhebliche Einsparungen möglich sind und daß diese Einsparungen bei abgebrochener Entnahme noch weiter zunehmen. Wie man leicht sieht, erscheint ein Abbruch nur in der zweiten Stichprobe als nicht sinnvoll, da für größere Fehleranteile die ASN_2 -Funktion mit der ASN des Doppeltests ohne Abbruch praktisch zusammenfällt. Deshalb soll im folgenden unter "abgebrochenem Doppeltest" immer ein Abbruch in beiden Stichproben (Variante 3) verstanden werden.

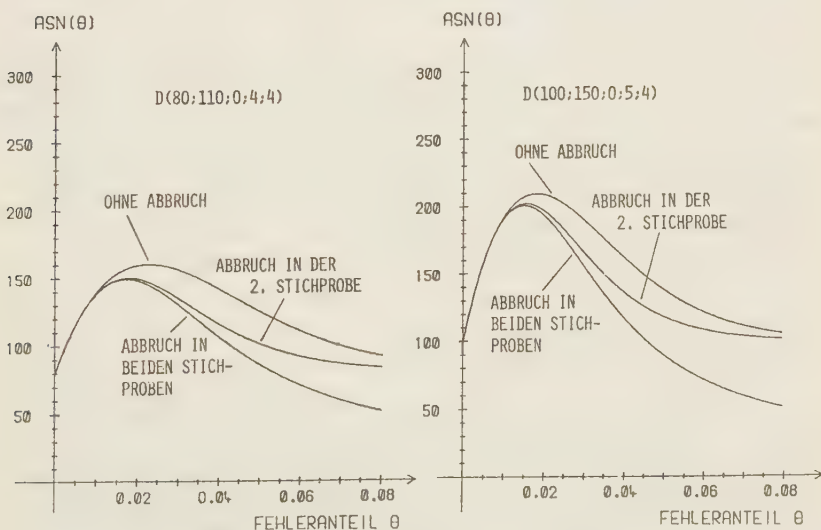


Abb. 2.14: ASN-Funktionen ausgewählter Doppeltests bei unterschiedlichen Abbruchmöglichkeiten

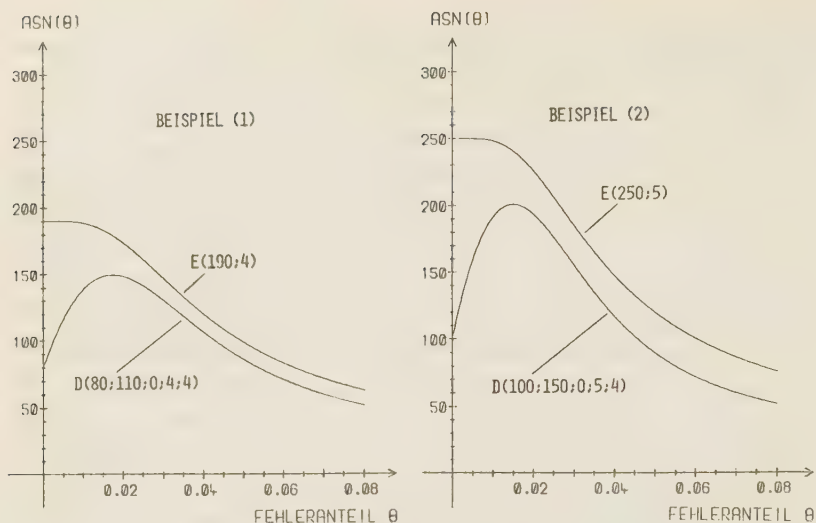


Abb. 2.15: Vergleich der ASN-Funktionen entsprechender Einfach- und Doppeltests bei abgebrochener Entnahme

Einen Vergleich der ASN-Funktionen entsprechender Einfach- und Doppeltests bei abgebrochener Entnahme zeigt die Abbildung 2.15; sie bestätigt die oben formulierte Beziehung (2.65). Man sieht, daß das Doppeltestverfahren vor allem bei kleinen Fehleranteilen deutliche Vorteile gegenüber dem Einfachtestverfahren bietet.

2.6 Zusammenfassung und Ergebnis

In den vorangegangenen Abschnitten sind im Anschluß an eine kurze Definition der wichtigsten Begriffe statistischer Testverfahren verschiedene Konzepte zur Gestaltung eines Stichprobentests (im englischen "design of a sampling plan") dargestellt und diskutiert worden. Als für die Zwecke dieser Arbeit am besten geeignet erwies sich die Vorgabe zweier Punkte der OC-Funktion in Form der Bedingungen (2.3) und (2.4). Dieses Konzept ist sehr

allgemein verwendbar - viele der dargestellten weiterführenden Ansätze können letztlich hierauf zurückgeführt werden - und ist außerdem im betrieblichen Prüfungswesen bisher auch am weitesten verbreitet.

Das bekannteste und meistgebrauchte Testverfahren ist das im Abschnitt 2.4 behandelte "klassische" Einfachtestverfahren, auch einfaches Annahmestichprobenverfahren, im englischen "regular single sampling" genannt. Die Bestimmung eines zu einer vorgegebenen Aufgabenstellung passenden Einfachtests ist relativ einfach möglich. Die Werte der OC-Funktion können aus einer Tabelle der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung abgelesen oder mit einem programmierbaren Taschenrechner leicht berechnet werden.

Hierauf aufbauend ist mit der "abgebrochenen Stichprobenentnahme" ("curtailed single sampling") ein einfaches sequentielles Testverfahren vorgestellt worden, das durch eine schrittweise Entnahme der Elemente und schrittweise Anwendung der Entscheidungsregel gekennzeichnet ist. Die Stichprobenvorschrift zu einer vorgegebenen Aufgabenstellung läßt sich aus einem geeigneten Einfachtest leicht ableiten; die OC-Funktion ist mit der OC-Funktion des klassischen Einfachtests völlig identisch. Die Werte der ASN-Funktion, die den durchschnittlichen Stichprobenumfang angibt, können mit Hilfe spezieller Tabellen, wie sie im Anhang dieser Arbeit angegeben werden, relativ einfach bestimmt werden. Die durchschnittlichen Einsparungen sind, vor allem bei relativ hohen Fehleranteilen in der Grundgesamtheit, beträchtlich.

Das Doppeltestverfahren (Doppelstichprobenprüfung; im englischen "double sampling") ist in seiner Grundform durch eine zweistufige Entscheidungsregel, bei abgebrochener Stichprobenentnahme ebenfalls durch eine sequentielle (schrittweise) Entscheidungsregel gekennzeichnet. Die Bestimmung eines zu einer vorgegebenen Aufgabenstellung passenden Doppeltests ist aufwendiger als bei den

bis dahin dargestellten Testverfahren und oft nur durch ein "trial and error"-Suchverfahren möglich. Die Berechnung von Werten der OC-Funktion ist relativ aufwendig, kann jedoch z. B. mit Hilfe eines programmierbaren Klein- oder Taschenrechners wie dem TI-59 stark vereinfacht werden. Bei der Berechnung von Werten der ASN-Funktion ist der Rechenaufwand primär davon abhängig, ob ein Abbruch nicht oder nur in der zweiten Stichprobe oder in beiden Stichproben zugelassen wird; diese Rechnungen können bei Verwendung geeigneter Tabellen¹ stark vereinfacht werden.

In den beiden hier dargestellten Beispielen konnten Doppeltests gefunden werden, deren Annahmezahl bei kombinierter Stichprobe mit der Annahmezahl des entsprechenden optimalen Einfachtests und deren maximaler Stichprobenumfang mit dem Stichprobenumfang des entsprechenden Einfachtests übereinstimmen. In diesem Fall erweist sich das Doppeltestverfahren als dem Einfachtestverfahren erheblich überlegen; für beliebige Fehleranteile sind mehr oder weniger große Einsparungen gegenüber dem entsprechenden Einfachtest möglich. Dies gilt jedoch nicht allgemein; denkbar ist, daß für andere Aufgabenstellungen nur Doppeltests mit $c_2 > c$ und/oder $n_1 + n_2 > n$ gefunden werden können, deren Vorteilhaftigkeit gegenüber dem Einfachtest nicht so deutlich ist.

Auffällig ist jedoch, daß die hier in Punkt 2.5 dargestellten "effektiveren" Testverfahren in der Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen kaum bekannt sind. Statt dessen wird, wie bereits in der Einführung zu dieser Arbeit erwähnt wurde, in dieser Literatur sehr stark die Verwendung des von A. WALD entwickelten sequentiellen Verhältnistests (Folgetests) propagiert. Dieser Folgetest ist jedoch, wie im folgenden dritten Kapitel dieser Arbeit zu zeigen sein wird, ein sehr anspruchsvolles Verfahren, dessen theoretische Durchdringung fundierte mathematische Kenntnisse verlangt.

¹ Vgl. die auf den Seiten 323 ff. dieser Arbeit angegebenen Tabellen der Funktion $E_R(d/n; \theta)$.

3. Folgetestverfahren nach Abraham WALD

3.1 Vorbemerkung

Das von Abraham WALD während des zweiten Weltkrieges entwickelte und von ihm als "sequential probability ratio test" (kurz SPRT) bezeichnete Testverfahren hat, wie bereits in der Einleitung dieser Arbeit ausgeführt wurde, von allen bisher bekannten sequentiellen Testverfahren (Folgetestverfahren) die weiteste Verbreitung erfahren.¹ Die von WALD und seinen Nachfolgern entwickelte Theorie hat sich zudem als sehr leistungsfähig erwiesen; sie kann auf fast alle seit 1943 veröffentlichten Folgetestverfahren unmittelbar oder mit geringen Modifikationen angewandt werden. Aus diesen Gründen sollen hier nur das Folgetestverfahren und die dazu gehörende Theorie nach A. WALD dargestellt werden.

Weiterhin sollen hier, wie bereits in den Kapiteln 1 und 2 dieser Arbeit dargelegt wurde, nur Tests zweier Hypothesen über Fehleranteile $H_0: \theta = \theta_0$ und $H_A: \theta = \theta_A$ mit $\theta_A > \theta_0$ berücksichtigt werden. Die Fehleranteile θ_0 und θ_A sowie die zulässigen Wahrscheinlichkeiten eines α - und eines β -Fehlers werden als vom Prüfer vorgegeben unterstellt.

In dem folgenden Abschnitt 3.2 sind zunächst die allgemeine Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach WALD und verschiedene Konzepte zur Bestimmung der kritischen Werte dieser Entscheidungsregel zu einer durch θ_0 , θ_A , α und β definierten Aufgabenstellung darzustellen. Daran anschließend sollen in Abschnitt 3.3 die Entscheidungsbereiche des Folgetestverfahrens nach WALD für alternative Verteilungen der Fehlerzahl in der Stichprobe hergeleitet werden. Dabei sollen zunächst die zu testenden Hypothesenwerte θ_0 und θ_A als "durchschnittliche" Fehleranteile interpretiert werden; in diesem Fall ist die Binomialverteilung die exakte Stichprobenverteilung.² Wenn

1 Vgl. Seite 2f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. die Ausführungen auf den Seiten 34 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

die zu testenden Hypothesenwerte dagegen als "individuelle" Fehleranteile interpretiert werden, ist die Hypergeometrische Verteilung die exakte Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe. Für diesen Fall sind Ansätze zur exakten und zur näherungsweisen Bestimmung der Entscheidungsbereiche abzuleiten.

Techniken zur grafischen und tabellarischen Entscheidungsfindung sind in Abschnitt 3.4 darzustellen. Dabei sollen auch Modifikationen der von WALD entwickelten schrittweisen Entscheidungsregel, z. B. durch die Einführung einer Abbruchgrenze und/oder durch die Vereinbarung einer Entnahme in Gruppen berücksichtigt werden. Zu zeigen ist, daß abhängig von der angenommenen Stichprobenverteilung und dem gewählten Entnahmemodus jeweils andere Auswertungstechniken optimal sein können.

Im Abschnitt 3.5 sind verschiedene Verfahren zur Bestimmung von Näherungsformeln bzw. von Ober- und Untergrenzen für die OC-Funktion und für die ASN-Funktion von Folgetests zu erläutern. Wie zu zeigen sein wird, sind exakte Beziehungen im Fall der Attributprüfung (Prüfung anhand qualitativer Merkmale) im allgemeinen nicht bestimmbar. In diesem Abschnitt sind auch die Möglichkeiten zur Erfassung der Modifikationen der von WALD definierten Entscheidungsregel, die in Abschnitt 3.4 vorgestellt wurden, zu diskutieren. Eine Zusammenfassung in Abschnitt 3.6 schließt dieses Kapitel ab.

In diesem dritten Kapitel sind nur Ergebnisse darzustellen, die von WALD selbst oder von anderen Autoren auf der Grundlage der von WALD entwickelten Theorie zum Folgetestverfahren abgeleitet worden sind. Neuere Ansätze zur Bestimmung der Eigenschaften von Folgetests, die in vielen Fällen genauere Ergebnisse liefern, sind im darauf folgenden vierten Kapitel dieser Arbeit zu behandeln.

3.2 Allgemeine Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach WALD

Die allgemeine Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach Abraham WALD beruht auf der Prüfgröße

$$L(x;y) = \frac{f(x_1/\theta_A) \cdot f(x_2/\theta_A) \cdot \dots \cdot f(x_y/\theta_A)}{f(x_1/\theta_0) \cdot f(x_2/\theta_0) \cdot \dots \cdot f(x_y/\theta_0)}, \quad (3.1)$$

die dem Test seinen Namen "probability ratio test" gab.¹ Dabei stehen y für den Stichprobenumfang, x_j für die Fehlerzahl des j -ten Elementes der Stichprobe ($j = 1, \dots, y$; x_j kann hier die Werte 0 oder 1 annehmen) und x für die Gesamtzahl der bis zum Stichprobenumfang y (einschließlich) gefundenen Fehler. Mit $f(x_j/\theta_0)$ und $f(x_j/\theta_A)$ werden die Wahrscheinlichkeiten bezeichnet, genau x_j Fehler zu finden, wenn die Nullhypothese H_0 bzw. die Alternativhypothese H_A Gültigkeit besitzt. Im Zähler der Prüfgröße steht also die Wahrscheinlichkeit dafür, den Zufallsweg $x_1, \dots, x_y$ zu erhalten, wenn H_A gültig ist; im Nenner steht die entsprechende Wahrscheinlichkeit für den Fall, daß die Nullhypothese H_0 gültig ist.

Mit der oben angegebenen Schreibweise (3.1) gleichbedeutend ist die Formel

$$L(x;y) = \prod_{j=1}^y \frac{f(x_j/\theta_A)}{f(x_j/\theta_0)}. \quad (3.2)$$

¹ Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem WALD, Abraham, Sequential Analysis (7th printing), New York, London, Sydney 1965, S. 18 f. und S. 37 ff.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 15 ff.; FISZ, Marek, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik (8. Aufl.), Berlin 1976, S. 678 ff.; WEBER, Erna, Grundriß der Biologischen Statistik (7., überarbeitete Aufl.), Stuttgart 1972, S. 419 ff.; WILKS, Samuel S., Mathematical Statistics (2nd printing with corrections), New York, London 1963, S. 482 f.; LEHMANN, E.L., Testing Statistical Hypotheses (3rd printing), New York, London, Sydney 1964, S. 97 f.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 131; SARKADI, VINCZE, a.a.O., S. 331 f.; KENDALL, STUART, The Advanced Theory ..., Vol. 2 ..., a.a.O., S. 619 f.; KARUS, Horst, Sequential-Analyse. Die Methode und ihre Anwendung unter besonderer Berücksichtigung der Probleme des Industriebetriebes. Diss. Köln 1960, S. 109 ff.

Der Wert der Prüfgröße $L(x;y)$ kann im Intervall

$$0 \leq L(x;y) \leq +\infty \quad (3.3)$$

liegen.¹

Die allgemeine Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach A. WALD, die im folgenden auch als "Entscheidungsregel 1" bezeichnet werden soll, besitzt zwei kritische Werte A und B, für die die Bedingung

$$0 < B < 1 < A \quad (3.4)$$

erfüllt sein muß.² Die Entscheidungsregel lautet: Aus einer Grundgesamtheit (einem Prüfungsfeld) werden zufällig Elemente entnommen und sofort geprüft; nach jeder Entnahme wird der Wert der Prüfgröße $L(x;y)$ neu berechnet. Wenn der Wert der Prüfgröße kleiner oder gleich B ist, wird die Nullhypothese angenommen, wenn er größer oder gleich A ist, wird die Nullhypothese zurückgewiesen; im Falle $B < L(x;y) < A$ ist die Entnahme fortzusetzen.

In Kurzschreibweise lautet diese Entscheidungsregel

- Weiterprüfung, wenn $B < L(x;y) < A$,
- Annahme der H_0 , wenn $L(x;y) \leq B$, (3.5)
- Rückweisung der H_0 , wenn $L(x;y) \geq A$ ist.

Diese Entscheidungsregel wird oft auch in logarithmischer Form angegeben.³ In diesem Fall erhält man als Entschei-

¹ Vgl. KARUS, H., a.a.O., S. 110 f.

² Vgl. FISZ, M., a.a.O., S. 680.

³ In dieser Arbeit soll als Logarithmus immer der natürliche Logarithmus (Logarithmus zur Basis e mit $e = 2,71828\dots$) verwendet werden, da er in manchen Fällen rechentechnische Vorteile bietet. Grundsätzlich können die in diesem Kapitel herzuleitenden Aussagen aber auch bei Verwendung eines anderen Logarithmus, z. B. des Zehnerlogarithmus $\lg$ abgeleitet werden. Zwischen beiden Logarithmensystemen besteht die Beziehung $\lg x = \ln x / \ln 10$ ($x > 0$); vgl. GELLERT, W. u. a. (Hrsg.), Kleine Enzyklopädie/Mathematik, Frankfurt/M., Zürich 1972, S. 63.

dungsregel¹

- Weiterprüfung, wenn $\ln B < l(x;y) < \ln A$
- Annahme der H_0 , wenn $l(x;y) \leq \ln B$ (3.6)
- Rückweisung der H_0 , wenn $l(x;y) \geq \ln A$

ist, mit

$$l(x;y) = \ln L(x;y) = \sum_{j=1}^Y \ln \frac{f(x_j/\theta_A)}{f(x_j/\theta_0)} . \quad (3.7)$$

Aus der Beziehung (3.3) folgt, daß für den Wertebereich der logarithmischen Prüfgröße

$$-\infty \leq l(x;y) \leq +\infty \quad (3.8)$$

gelten muß; entsprechend erhält man für die logarithmisierten kritischen Werte aus (3.4) die Bedingung²

$$\ln B < 0 < \ln A . \quad (3.9)$$

Ein Beispiel für die Entscheidungsregel eines Folgetests nach WALD in logarithmischer Form ist in der Abbildung 3.1 auf der folgenden Seite dargestellt.

Eine Berechnung der Prüfgröße $L(x;y)$ ist nur möglich, wenn eine bestimmte theoretische Verteilung als Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe unterstellt werden kann. Wie im folgenden Abschnitt 3.3 zu zeigen sein wird, können abhängig von der Art der theoretischen Verteilung verschiedene Transformationen der allgemeinen Entscheidungsregel ("Entscheidungsregel 2" bzw. "Entscheidungsregel 3") sinnvoll sein. Auf die damit verbundenen Möglichkeiten und Probleme soll jedoch erst an der angegebenen Stelle eingegangen werden.

¹ Vgl. z. B. WALD, A., a.a.O., S. 38; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 19; LEHMANN, E.L., a.a.O., S. 99; FISZ, M., a.a.O., S. 679 f.

² Vgl. FISZ, M., a.a.O., S. 680.

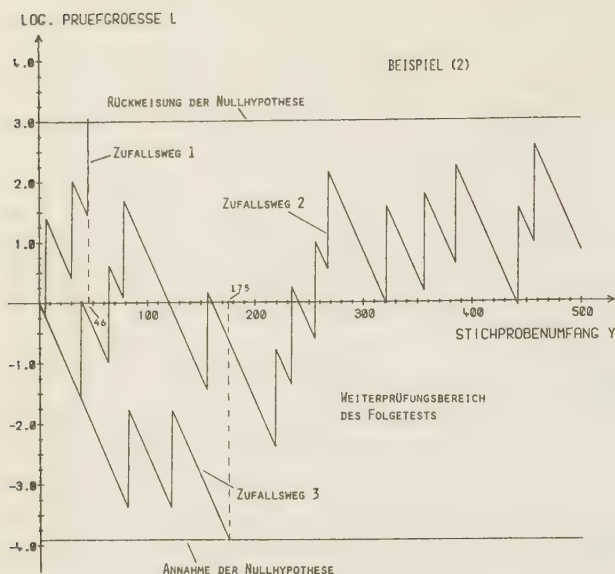


Abb. 3.1: Allgemeine Entscheidungsregel eines Folgetests nach WALD in logarithmischer Form

An dieser Stelle sind zunächst verschiedene Konzepte zur Definition der kritischen Werte A und B (bzw. $\ln A$ und $\ln B$) zu erläutern. Diese kritischen Werte sind, wie im folgenden gezeigt werden soll, von der Art der Stichprobenverteilung und von den Werten der zu prüfenden Hypothesen unabhängig; sie hängen allein von den vorgegebenen zulässigen Risiken eines α - und β -Fehlers ab.

WALD findet, daß für praktische Bedürfnisse die kritischen Werte A und B am sinnvollsten durch

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (3.10)$$

und

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (3.11)$$

bestimmt werden.¹ Auf eine Wiedergabe der von WALD gegebenen Herleitung sei an dieser Stelle verzichtet, da gleichlautende oder ähnliche Herleitungen ebenfalls in zahlreichen Quellen der Sekundärliteratur zu finden sind.²

Die hier angegebenen Formeln haben jedoch, wie WALD betont, nur Näherungscharakter: Bei Verwendung der Definitionen (3.10) und (3.11) kann das tatsächliche Risiko eines α - oder β -Fehlers über dem entsprechenden zulässigen Fehlerisiko liegen.³ Das maximale tatsächliche Fehlerisiko ist durch

$$1-OC(\theta_0) \leq \frac{\alpha}{1-\beta} \quad (3.12)$$

oder

$$OC(\theta_A) \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (3.13)$$

gegeben, wobei als Nebenbedingung

$$1-OC(\theta_0) + OC(\theta_A) \leq \alpha + \beta \quad (3.14)$$

gelten muß. Das bedeutet, daß die Summe der tatsächlichen Fehlerisiken kleiner oder gleich der Summe der zulässigen Fehlerisiken ist.

In den beiden auf der Seite 40 dieser Arbeit eingeführten Beispielen würde man als Obergrenzen für die bei Verwendung der Gleichungen (3.10) und (3.11) maximal möglichen Fehlerisiken

1 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 41 f. und S. 45 ff.

2 Vgl. z. B. SCHULTE, E., a.a.O., S. 131 f.; KARUS, H., a.a.O., S. 114 ff.; WEBER, E., a.a.O., S. 420 f.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 15 f.; KENDALL, STUART, The Advanced Theory ..., Vol. 2 ..., a.a.O., S. 620 f. Eine andere Herleitung der gleichen Beziehungen gibt FISZ, M., a.a.O., S. 690 f.

3 Vgl. zu den folgenden Ausführungen WALD, A., a.a.O., S. 45 f.; SARKADI, VINCZE, a.a.O., S. 332 ff.; LEHMANN, E.L., a.a.O., S. 99; WILKS, S.S., a.a.O., S. 486; GHOSH, B.K., a.a.O., S. 91; KENDALL, STUART, The Advanced Theory ..., Vol. 2 ..., a.a.O., S. 621.

a) zu Beispiel (1) ($\alpha = \beta = 0,05$):

$$1-OC(\theta_0) = \frac{0,05}{0,95} \approx 0,05263 \hat{=} 5,263 \%$$

und

$$OC(\theta_A) = \frac{0,05}{0,95} \approx 0,05263 \hat{=} 5,263 \%,$$

b) zu Beispiel (2) ($\alpha = 0,05$; $\beta = 0,02$):

$$1-OC(\theta_0) = \frac{0,05}{0,98} \approx 0,05102 \hat{=} 5,102 \%$$

und

$$OC(\theta_A) = \frac{0,02}{0,95} \approx 0,02105 \hat{=} 2,105 \%$$

erhalten. Zu beachten ist, daß in einer konkreten Test-situation immer nur eines der beiden Fehlerrisiken größer als zulässig sein kann.

Wie man sieht, sind die möglichen Überschreitungen der zulässigen Risiken eines α - und eines β -Fehlers durch die tatsächlichen Fehlerrisiken zwar nicht groß, aber doch feststellbar. Diese Tatsache wird jedoch im überwiegenden Teil der Literatur entweder gar nicht erwähnt¹ oder aber als vernachlässigbar gering angesehen.²

Auf die Existenz einer konservativen Lösung weist - ohne nähere Erläuterungen und ohne Beweis - GHOSH hin: Er gibt an, daß bei Verwendung der Bestimmungsgleichungen

$$\ln A = - \ln \alpha \quad (3.15)$$

und

$$\ln B = \ln \beta \quad (3.16)$$

¹ Vgl. SCHULTE, E., a.a.O., S. 132; KARUS, H., a.a.O., S. 118 f.; FISZ, M., a.a.O., S. 690; WEBER, E., a.a.O., S. 421; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 15 f.

² Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 46 f.; GHOSH, B.K., a.a.O., S. 91; LEHMANN, E.L., a.a.O., S. 99; WILKS, S.S., a.a.O., S. 487; KENDALL, STUART, The Advanced Theory ..., Vol. 2 ..., a.a.O., S. 621.

eine Überschreitung der vorgegebenen zulässigen Risiken eines α - und β -Fehlers mit Sicherheit ausgeschlossen ist.¹ Durch Bildung des Antilogarithmus erhält man für die kritischen Werte A und B

$$A = \frac{1}{\alpha} \quad (3.17)$$

und

$$B = \beta . \quad (3.18)$$

Die Bestimmungsgleichungen (3.17) und (3.18) wurden unabhängig von GHOSH auch von GUENTHER gefunden.² GUENTHER beweist ausgehend von den Ungleichungen (3.12) und (3.13), daß die Verwendung der Gleichungen (3.17) und (3.18) tatsächlich zu einer konservativen Lösung führt, also die Einhaltung der zulässigen Fehlerrisiken garantiert. Auf eine Wiedergabe dieses Beweises sei hier jedoch verzichtet.³

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit sollen alle Folgetests bzw. Bereichsgrenzen, die auf die beiden Bestimmungsgleichungen (3.10) und (3.11) zurückgehen, als "approximativ" und alle Folgetests bzw. Bereichsgrenzen, die auf die Bestimmungsgleichungen (3.15) und (3.16) bzw. (3.17) und (3.18) zurückgehen, als "konservativ" bezeichnet werden.

Zu den beiden auf der Seite 40 dieser Arbeit vorgegebenen Beispielen würde man bei Verwendung der approximativen bzw. der konservativen Definition die in der folgenden Tabelle 3.1 angegebenen kritischen Werte der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach WALD erhalten.

1 Vgl. GHOSH, B.K., a.a.O., S. 91.

2 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 49.

3 Vgl. ebenda, S. 48 f.

Beispiel	kritische Werte (approximative Definition)			
	A	B	ln A	ln B
(1)	19,0	0,0526	2,9444	-2,9444
(2)	19,6	0,0211	2,9755	-3,8607

Beispiel	kritische Werte (konservative Definition)			
	A	B	ln A	ln B
(1)	20,0	0,0500	2,9957	-2,9957
(2)	20,0	0,0200	2,9957	-3,9120

Tab. 3.1: Kritische Werte der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach WALD für ausgewählte Beispiele

Die hier für die beiden Beispiele errechneten kritischen Werte bestätigen, daß bei Verwendung der konservativen Definitionen der kritischen Werte (konservativer Lösung) das Intervall zwischen dem Annahme- und dem Rückweisungsbereich der Nullhypothese breiter ist als bei Verwendung der approximativen Definitionen (approximativer Lösung). Der (durchschnittlich) entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang wird also bei konservativer Lösung ceteris paribus geringfügig größer sein als bei approximativer Lösung.¹ Da jedoch allein bei konservativer Lösung die Einhaltung der auf Seite 18 dieser Arbeit formulierten Bedingungen (2.3) und (2.4) an den Verlauf der OC-Funktion gesichert ist, sollen im weiteren Verlauf dieser Arbeit, soweit nicht ausdrücklich anders vermerkt, nur die konservativen Definitionen (3.17) und (3.18) verwendet werden.

Aus der Tabelle 3.1 wird auch ein weiterer Vorteil der konservativen gegenüber der approximativen Lösung deutlich: Bei konservativer Lösung hängen die kritischen

¹ Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 49.

Werte A und B nur von jeweils einem Fehlerrisiko ab.¹ Da die beiden hier angegebenen Beispiele das gleiche zulässige Risiko eines α -Fehlers $\alpha = 0,05$ besitzen, besitzen sie bei konservativer Lösung auch den gleichen Wert für A und damit in der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens die gleiche Rückweisungsgrenze der Nullhypothese.² Bei approximativer Lösung sind dagegen die kritischen Werte A und B Funktionen beider Fehlerrisiken α und β und für jede gewünschte Kombination von α und β neu zu berechnen.³

Wenn eine Tabellierung der kritischen Werte oder auch der daraus im folgenden Abschnitt 3.3 dieser Arbeit herzuleitenden Entscheidungskennzahlen gewünscht ist, ist also die konservative Lösung wesentlich weniger aufwendig: falls a verschiedene Werte für α und b verschiedene Werte für β zu berücksichtigen sind, sind bei konservativer Lösung für A und B insgesamt $a+b$ Werte, bei approximativer Lösung insgesamt $2ab$ Werte für A und B zu berechnen bzw. zu tabellieren. Auf dieses Problem soll in Abschnitt 2.4 dieser Arbeit noch näher eingegangen werden.

Für den Fall, daß die zulässigen Risiken eines α - und β -Fehlers gleich sind ($\alpha = \beta$), gilt sowohl bei approximativer als auch bei konservativer Lösung

$$B = \frac{1}{A} \quad (3.19)$$

bzw.

$$\ln B = - \ln A , \quad (3.20)$$

wie man aus den Definitionsgleichungen (3.10) und (3.11) bzw. (3.15) bis (3.18) leicht ableiten kann. Dies wird

1 Vgl. die Bestimmungsgleichungen (3.15) und (3.16) bzw. (3.17) und (3.18) auf Seite 86 f. dieser Arbeit

2 Vgl. Abbildung 3.1 auf Seite 84 dieser Arbeit.

3 Vgl. die Bestimmungsgleichungen (3.10) und (3.11) auf Seite 84 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

auch durch die in Tabelle 3.1 dargestellten kritischen Werte zu den Beispielen (1) und (2) bestätigt. Der Rechenaufwand ist also im Falle gleicher zulässiger Risiken eines α - und β -Fehlers geringer als im allgemeinen Fall.

3.3 Entscheidungsbereiche bei dem Folgetestverfahren

3.3.1 Vorbemerkung

Aufbauend auf der im vorangegangenen Abschnitt dargestellten allgemeinen Entscheidungsregel (Entscheidungsregel 1) des Folgetestverfahrens nach WALD und den alternativen Konzepten zur Vorgabe der kritischen Werte A und B dieser Entscheidungsregel sind in diesem Abschnitt die Möglichkeiten einer Entscheidungsfindung für eine konkrete Form der Stichprobenverteilung entwickelt worden. Dabei soll zunächst, wie auf den Seiten 34 ff. dieser Arbeit begründet wurde, die Binomialverteilung als exakte Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe unterstellt werden. Daran anschließend sind Lösungsmöglichkeiten für den Fall, daß die Hypergeometrische Verteilung die exakte Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe ist, zu diskutieren.

Wie zu zeigen sein wird, ist eine direkte Anwendung der Entscheidungsregel 1, die nach jeder Entnahme eine Neuberechnung der Prüfgröße $L(x;y)$ erfordert¹, nicht in jedem Fall sinnvoll. Vielmehr können im Modell der Binomialverteilung durch geeignete Transformationen andere Formen der Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens bestimmt werden, die für praktische Anforderungen wesentlich besser geeignet sind. Die im Modell der Hypergeometrischen Verteilung möglichen und sinnvollen Umformungen sind, wie

¹ Vgl. Seite 81 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

im Anschluß daran zu zeigen sein wird, primär davon abhängig, ob die Hypergeometrische Verteilung selbst oder eine von mehreren Approximationen dieser Verteilung zugrunde gelegt werden soll.

Als Abschluß dieses Abschnittes sollen die gefundenen Ergebnisse zusammengefaßt und die Vor- und Nachteile der verschiedenen Alternativen diskutiert werden.

3.3.2 Entscheidungsbereiche im Modell der Binomialverteilung

In der betriebswirtschaftlichen Literatur zur Anwendung des Folgetestverfahrens bei Ordnungsmäßigkeitsprüfungen wird offenbar nur die Binomialverteilung als Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe berücksichtigt.¹ Aber auch in der übrigen Literatur zum Folgetestverfahren wird im Falle der Attributprüfung vorzugsweise die Binomialverteilung als Stichprobenverteilung unterstellt.² Viele Herleitungen von Eigenschaften von Folgetests, die im Abschnitt 3.5 dieser Arbeit darzustellen sind, beziehen sich ausschließlich auf den Fall der Binomialverteilung. Die Binomialverteilung ist zudem, wie auf den Seiten 34 ff. dieser Arbeit begründet wurde, dann die exakte Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe, wenn die zu testen-

1 Vgl. zu den folgenden Ausführungen z. B. LEFFSON, LIPP-MANN, BAETGE, a.a.O., S. 62 ff.; KARUS, H., a.a.O., S. 121 ff.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 132 ff.; WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 127 ff.; ders., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 494 ff. bzw. S. 105 ff.; BUCHNER, REUTER, a.a.O., S. 542 ff.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 109 ff.

2 Vgl. z. B. WALD, A., a.a.O., S. 90 ff.; WEBER, E., a.a.O., S. 421 ff.; FISZ, M., a.a.O., S. 691 ff.; WILKS, S.S., a.a.O., S. 494 ff.; GHOSH, B.K., a.a.O., S. 50 f. und S. 106 f.; SARKADI, VINCZE, a.a.O., S. 338 ff.; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 49 ff.; Statistical Research Group, Columbia University, Sequential Analysis of Statistical Data: Applications. Prepared for the Applied Mathematics Panel, National Defense Research Committee, Office of Scientific Research and Development. SRG Report 255 (revised), AMP Report 30.2R (revised), New York, London 1946, S. 2.01 ff.

den Hypothesenwerte θ_0 und θ_A als durchschnittliche Fehleranteile interpretiert werden. Aus diesen Gründen soll zunächst die Herleitung der Entscheidungsbereiche für den Fall der Binomialverteilung dargestellt werden.

Grundlage der folgenden Herleitung ist die in Abschnitt 3.2 dieser Arbeit definierte allgemeine Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens nach WALD. Im Modell der Binomialverteilung sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß das j -te Element der Stichprobe fehlerfrei ($x_j=0$) oder fehlerhaft ($x_j=1$) ist, konstant für alle $j=1,2,\dots$ mit

$$f(x_j/\theta) = \begin{cases} (1-\theta) & \text{für } x_j=0 & (j=1,2,\dots) \\ \theta & \text{für } x_j=1 & (j=1,2,\dots) \end{cases} \quad (3.21)$$

wobei θ den Fehleranteil der Grundgesamtheit bezeichnet.

Ausgehend von den Definitionsgleichungen (3.1) oder (3.2) erhält man als Wert der Prüfgröße

$$L(x;y) = \prod_{j=1}^y \frac{f(x_j/\theta_A)}{f(x_j/\theta_0)} = \left(\frac{\theta_A}{\theta_0}\right)^x \cdot \left(\frac{1-\theta_A}{1-\theta_0}\right)^{y-x}; \quad (3.22)$$

hierbei bezeichnet x die Anzahl der bis zu einem Stichprobenumfang von y (einschließlich) gefundenen Fehler in der Stichprobe, es gilt also

$$x = \sum_{j=1}^y x_j. \quad (3.23)$$

Die Bedingung für Weiterprüfung lautet bei Verwendung der allgemeinen Entscheidungsregel (Entscheidungsregel 1) (3.5)

$$B < \left(\frac{\theta_A}{\theta_0} \right)^x \cdot \left(\frac{1-\theta_A}{1-\theta_0} \right)^{y-x} < A \quad (3.24)$$

oder in logarithmierter Form¹

$$\ln B < x \cdot \ln \frac{\theta_A}{\theta_0} + (y-x) \cdot \ln \frac{1-\theta_A}{1-\theta_0} < \ln A . \quad (3.25)$$

Die Bedingungen für Annahme bzw. Rückweisung der Nullhypothese H_0 ergeben sich aus den Definitionen (3.5) oder (3.6) der Entscheidungsregel analog und sollen deshalb an dieser Stelle nicht ausführlicher dargestellt werden. Nachteilig an der durch (3.24) oder (3.25) gegebenen Entscheidungsregel ist, daß der Aufwand einer Neuberechnung der Prüfgröße $L(x;y)$ nach jeder Entnahme relativ hoch ist.

Die Bedingung (3.25) für Weiterprüfung läßt sich jedoch, wenn zum Zwecke einer weiteren Vereinfachung²

$$g_1 = \ln \frac{\theta_A}{\theta_0} \quad (3.26)$$

und

$$g_2 = - \ln \frac{1-\theta_A}{1-\theta_0} = \ln \frac{1-\theta_0}{1-\theta_A} \quad (3.27)$$

gesetzt werden, umformen zu

$$\frac{\ln B}{g_1+g_2} + \frac{g_2}{g_1+g_2} \cdot y < x < \frac{\ln A}{g_1+g_2} + \frac{g_2}{g_1+g_2} \cdot y . \quad (3.28)$$

Die Bereichsgrenzen in dieser Ungleichung sind zwei parallele Geraden, die im folgenden als Annahmegerade

$$c(y) = -h_1 + s \cdot y \quad (3.29)$$

1 Vgl. z. B. WALD, A., a.a.O., S. 90 f.; FISZ, M., a.a.O., S. 693 f.; Statistical Research Group, Columbia University, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. B.12 f.

2 Diese Symbolik geht zurück auf einen Vorschlag der Statistical Research Group, Columbia University, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 2.14 f.; vgl. auch WEBER, E., a.a.O., S. 422 f.

und Rückweisegerade

$$d(y) = h_2 + s \cdot y \quad (3.30)$$

bezeichnet werden sollen; wobei

$$s = \frac{g_2}{g_1 + g_2} = \frac{\ln \frac{1-\theta_0}{1-\theta_A}}{\ln \frac{\theta_A}{\theta_0} + \ln \frac{1-\theta_0}{1-\theta_A}} \quad (3.31)$$

$$h_1 = \frac{-\ln B}{g_1 + g_2} = \frac{-\ln B}{\ln \frac{\theta_A}{\theta_0} + \ln \frac{1-\theta_0}{1-\theta_A}} \quad (3.32)$$

und

$$h_2 = \frac{\ln A}{g_1 + g_2} = \frac{\ln A}{\ln \frac{\theta_A}{\theta_0} + \ln \frac{1-\theta_0}{1-\theta_A}} \quad (3.33)$$

gilt.¹ Die für einen konkreten Stichprobenumfang y errechneten Werte der Funktionen $c(y)$ und $d(y)$ sollen in Anlehnung an die in den Abschnitten 2.4 und 2.5 gebrauchten Definitionen als Annahmezahl bzw. Rückweisezahl des Folgetests für einen Stichprobenumfang von y Elementen bezeichnet werden. Die Entscheidungsregel lautet nun: Aus einer Grundgesamtheit (einem Prüfungsfeld) werden zufällig Elemente entnommen und sofort geprüft. Wenn die Anzahl x der bis zum Stichprobenumfang von y gefundenen Fehler ($y=1,2,\dots$) kleiner oder gleich der entsprechenden Annahmezahl $c(y)$ ist, wird die Nullhypothese angenommen,

¹ Vgl. zu diesen und den folgenden Ausführungen vor allem WALD, A., a.a.O., S. 91 ff.; FISZ, M., a.a.O., S. 693 ff.; WEBER, E., a.a.O., S. 422 f.; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 49 f.; KARUS, H., a.a.O., S. 124 ff.; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 133 f.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 133 ff.

wenn die Zahl der Fehler größer oder gleich der Rückweisezahl $d(y)$ ist, wird die Nullhypothese zurückgewiesen, im Falle $c(y) < x < d(y)$ ist die Entnahme fortzusetzen.

Diese Form der Entscheidungsregel soll im folgenden als "Entscheidungsregel 2" bezeichnet werden; sie lautet in Kurzschreibweise:

- Weiterprüfung, wenn $c(y) < x < d(y)$
 - Annahme der H_0 , wenn $x \leq c(y)$ (3.34)
 - Rückweisung der H_0 , wenn $x \geq d(y)$
- $(y=1,2,\dots)$

Ein Beispiel einer solchen Entscheidungsregel und mögliche Zufallswege sind in der folgenden Abbildung 3.2 grafisch dargestellt.

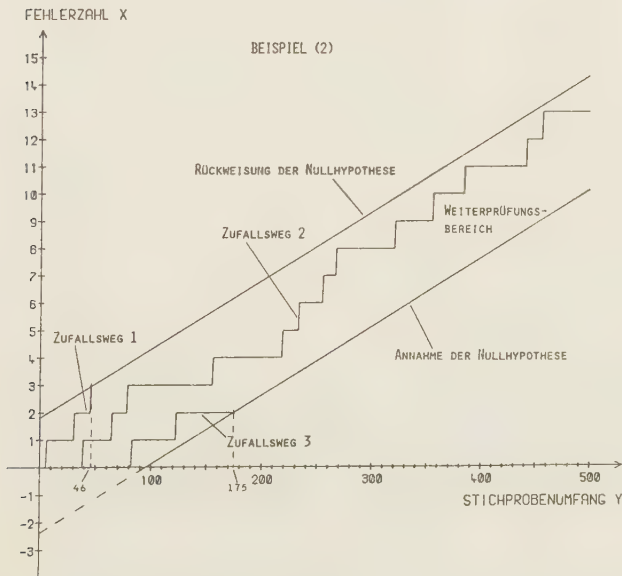


Abb. 3.2: Entscheidungsregel ("Entscheidungsregel 2") und mögliche Zufallswege eines Folgetests im Binomialmodell

Die hier angegebene Entscheidungsregel ist die in der Literatur meistgebrauchte Form der Entscheidungsregel, lediglich in der Symbolik bestehen Unterschiede.¹ Die Annahme- und Rückweisezahlen werden in der Literatur in Anlehnung an WALD meistens als a_m und r_m bezeichnet, wobei m für den Stichprobenumfang steht.² In dieser Arbeit sollen jedoch in Anlehnung an die in den Abschnitten 2.4 und 2.5 eingeführte Symbolik die Annahme- und Rückweisezahlen als $c(y)$ bzw. $d(y)$ bezeichnet werden; die Symbole a und r sind für die Kennzahlen der noch darzustellenden "Entscheidungsregel 3" vorgesehen.

Die oben angegebene Entscheidungsregel (3.34) kann als approximative oder als konservative Lösung verwendet werden, abhängig davon, ob für die kritischen Werte A und B die Definitionen (3.10) und (3.11) oder (3.17) und (3.18) eingesetzt werden. In der Literatur findet man praktisch nur die approximative Lösung, eine Ausnahme bildet meines Wissens nur GUENTHER, der dem Anwender die Wahl zwischen den beiden Lösungen überläßt.³

Im Beispiel (1) erhält man bei konservativer Lösung als Bedingung für die Annahme der H_0

$$x \leq -1,814846 + 0,024985 \cdot y \quad (y=1,2,\dots) \quad (3.35)$$

und als Bedingung für die Rückweisung der H_0

$$x \geq +1,814846 + 0,024985 \cdot y \quad (y=1,2,\dots). \quad (3.36)$$

1 Vgl. z. B. LEFFSON, U., a.a.O., S. 182 ff.; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 62 ff.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 134 ff.; WYSOCKI, K. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 127 ff.; ders., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 494 ff. bzw. 105 ff.; WALD, A., a.a.O., S. 91 ff.; WEBER, E., a.a.O., S. 423 ff.; FISZ, M., a.a.O., S. 494 f.; KARUS, H., a.a.O., S. 126 ff.

2 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 92 ff.; WEBER, E., a.a.O., S. 423 ff.; FISZ, M., a.a.O., S. 694 ff.

3 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 48 f.

Eine Übersicht der Koeffizienten beider Beispiele sowohl bei approximativer als auch bei konservativer Lösung gibt die folgende Tabelle 3.2.

Lösung	Bei- spiel	Koeffizienten		
		s	h_1	h_2
approximativ	(1)	0,024985	1,783772	1,783772
	(2)	0,024985	2,338871	1,802607
konservativ	(1)	0,024985	1,814846	1,814846
	(2)	0,024985	2,369945	1,814846

Tab. 3.2: Koeffizienten der Annahme- und Rückweisegeraden des Folgetestverfahrens nach WALD für ausgewählte Beispiele (Binomialmodell)

In den vier in Tabelle 3.2 dargestellten Varianten ist die Steigung s der Bereichsgrenzen, d. h. der Annahme- und Rückweisegeraden gleich. Dies ist, wie man aus der Gleichung (3.33) erkennt, dadurch bedingt, daß s allein von den Hypothesenwerten θ_0 und θ_A abhängt, die in den beiden hier gewählten Beispielen übereinstimmen. Auch hinsichtlich der Ordinatenabschnitte h_1 und h_2 findet man die bereits auf den Seiten 86 ff. dieser Arbeit hergeleiteten Ergebnisse bestätigt: Bei konservativer Lösung ist der Abstand der Bereichsgrenzen voneinander größer als bei approximativer Lösung. Der Aufwand zur Berechnung der Koeffizienten ist bei konservativer Lösung geringer, da hier die Koeffizienten der Rückweisungsgeraden beider Beispiele übereinstimmen. Da jedoch die Unterschiede so gering sind, daß sie sich zeichnerisch kaum erfassen lassen, sei auf eine grafische Darstellung der alternativen Bereichsgrenzen hier verzichtet.

Für den Spezialfall, daß die zulässigen Risiken eines α - und β -Fehlers gleich sind - dieser Fall ist in Beispiel (1) realisiert - findet man ausgehend von den Beziehungen

(3.32) und (3.33) sowie (3.20) Übereinstimmung der Ordinatenabschnitte h_1 und h_2 . Dies gilt, wie durch die in Tabelle 3.2 dargestellten Ergebnisse bestätigt wird, sowohl bei approximativer als auch bei konservativer Lösung.

Die zuletzt dargestellte Entscheidungsregel 2 ist gegenüber der allgemeinen Entscheidungsregel, die nach jeder Entnahme eine Neuberechnung der Prüfgröße $L(x;y)$ erfordern würde, weniger rechenaufwendig und wesentlich anschaulicher. Zum Beispiel kann man anhand von Abbildung 3.2 leicht zeigen, daß eine Annahme der Nullhypothese nur möglich ist, wenn die Bedingung

$$c(y) \geq 0 \quad (3.37)$$

erfüllt ist.¹ Durch Einsetzen der Definitionsgleichung (3.29) findet man

$$y \geq \frac{h_1}{s} \quad (3.38)$$

als zusätzliche Bedingung für Annahme der H_0 . Eine Rückweisung der H_0 ist nur möglich, wenn

$$d(y) \leq y \quad (3.39)$$

gilt; wobei diese Beziehung ausgehend von der Definitionsgleichung (3.30) zu

$$y \geq \frac{h_2}{1-s} \quad (3.40)$$

umgeformt werden kann. Auf eine Wiedergabe der entsprechenden Herleitungen sei hier der Einfachheit halber verzichtet.

¹ Vgl. zu den folgenden Ausführungen auch: KARUS, H., a.a.O., S. 133 f.; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 50 f.

Die durch die Bedingungen (3.38) und (3.40) definierten Grenzen sind zu den beiden hier dargestellten Beispielen in der folgenden Tabelle 3.3 angegeben. Dabei wurden die errechneten Werte jeweils auf die nächstgrößere ganze Zahl aufgerundet.

Lösung	Bei- spiel	Mindeststichprobenumfang zur	
		Annahme der H_0	Rückweisung der H_0
approximativ	(1)	72	2
	(2)	94	2
konservativ	(1)	73	2
	(2)	95	2

Tab. 3.3: Mindeststichprobenumfänge von Folgetests zu ausgewählten Beispielen zur Annahme bzw. Rückweisung der Nullhypothese (Binomialmodell)

Die in Tabelle 3.3 angegebenen Ergebnisse bestätigen, daß der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang bei konservativer Lösung größer oder gleich, aber nicht kleiner als der entsprechende Umfang bei approximativer Lösung sein kann. Im Vergleich mit den in Abschnitt 2.5.3 dieser Arbeit bestimmten optimalen Doppeltests findet man, daß in beiden Beispielen die beim Doppeltest zur Rückweisung der H_0 mindestens erforderlichen Stichprobenumfänge von $y = d_1 = 4$ und die zur Annahme der H_0 mindestens erforderlichen Stichprobenumfänge von $y = n_1 = 80$ bzw. $n_1 = 100$ größer als die entsprechenden Umfänge beim Folgetestverfahren sind.¹ Weitere Kriterien zur Beurteilung der Vorteilhaftigkeit des Folgetestverfahrens sind jedoch erst in den Abschnitten 3.5 und 4.3 sowie im fünften Kapitel dieser Arbeit herzuleiten.

¹ Diese Aussagen werden ebenfalls durch ein von COWDEN gegebenes Beispiel bestätigt; vgl. COWDEN, D.J., a.a.O., S. 546 ff. und S. 561 ff.

Eine Berechnung der zur Annahme der H_0 mindestens erforderlichen Stichprobenumfänge ist ebenfalls mit Hilfe der im folgenden darzustellenden Transformation der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens möglich: GUENTHER empfiehlt, die Gleichungen der Bereichsgrenzen nicht als Funktion des Stichprobenumfangs y , sondern als Funktion der Fehlerzahl x anzugeben.¹

Ausgehend von der allgemeinen Entscheidungsregel (3.25) im Binomialmodell und unter Berücksichtigung der Definitionen (3.26) und (3.27) findet man

$$\frac{-\ln B}{g_2} + \frac{g_1 + g_2}{g_2} \cdot x > y > \frac{-\ln A}{g_2} + \frac{g_1 + g_2}{g_2} \cdot x \quad (3.41)$$

als Bedingung für Weiterprüfung. Die Bereichsgrenzen sind auch in diesem Fall parallele Geraden, die hier als Annahmekenngerade

$$a(x) = f_1 + s_k x \quad (x=0,1,2,\dots) \quad (3.42)$$

und Rückweisekenngerade

$$r(x) = -f_2 + s_k x \quad (x=0,1,2,\dots) \quad (3.43)$$

bezeichnet werden sollen. Konkrete Werte dieser Bereichsgrenzen für eine vorgegebene Fehlerzahl x sollen Annahmekennzahl $a(x)$ bzw. Rückweisekennzahl $r(x)$ genannt werden. Die Koeffizienten dieser Kenngeraden ergeben sich ausgehend von (3.41) als

$$s_k = \frac{g_1 + g_2}{g_2} = 1 + \frac{g_1}{g_2}, \quad (3.44)$$

$$f_1 = \frac{-\ln B}{g_2}, \quad (3.45)$$

und

$$f_2 = \frac{\ln A}{g_2}, \quad (3.46)$$

¹ Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 53 f.

wobei g_1 und g_2 die durch die Gleichungen (3.26) und (3.27) definierten Hilfsgrößen sind. Ausgehend von den in den Gleichungen (3.31) bis (3.33) definierten Werten für s , h_1 und h_2 können diese Koeffizienten einfacher auch als

$$s_k = \frac{1}{s}, \quad (3.47)$$

$$f_1 = h_1 s_k = \frac{h_1}{s}, \quad (3.48)$$

und

$$f_2 = h_2 s_k = \frac{h_2}{s} \quad (3.49)$$

berechnet werden. Auf eine ausführliche Darstellung dieser Herleitung soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch verzichtet werden.

Die vollständige Entscheidungsregel, die im folgenden als "Entscheidungsregel 3" bezeichnet werden soll, lautet: Aus einer Grundgesamtheit (einem Prüfungsfeld) werden zufällig Elemente entnommen und sofort geprüft. Für die bis zum Stichprobenumfang y (einschließlich) gefundene Fehlerzahl x werden die Kennzahlen $a(x)$ und $r(x)$ bestimmt. Falls der aktuelle Stichprobenumfang y zwischen diesen Kennzahlen liegt, ist die Entnahme fortzusetzen; falls y größer oder gleich der Annahmekennzahl $a(x)$ ist, kann die Nullhypothese angenommen werden; falls y kleiner oder gleich der Rückweiskennzahl $r(x)$ ist, wird die Nullhypothese zurückgewiesen.

In Kurzform lautet die Entscheidungsregel 3

- Weiterprüfung, wenn $a(x) > y > r(x)$
 - Annahme der H_0 , wenn $y \geq a(x)$
 - Rückweisung der H_0 , wenn $y \leq r(x)$
- ($x=0,1,2,\dots$)
- (3.50)

Diese Entscheidungsregel und mögliche Zufallswege sind in der folgenden Abbildung 3.3 grafisch dargestellt.

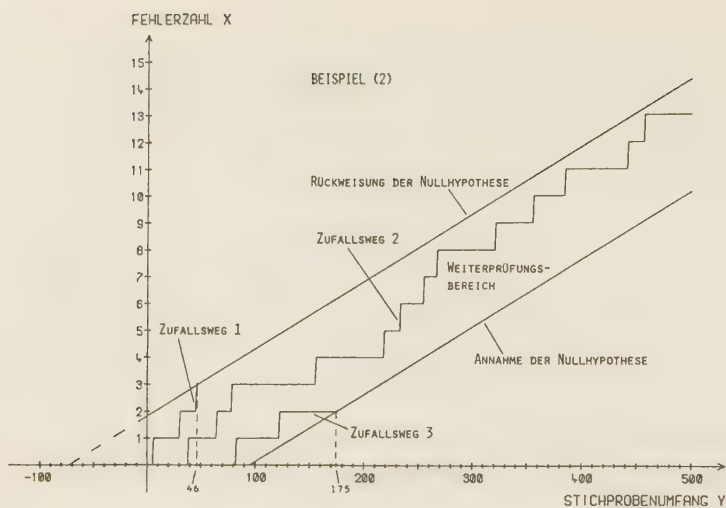


Abb. 3.3: Entscheidungsregel ("Entscheidungsregel 3") und mögliche Zufallswege eines Folgetests (Binomialmodell)

Die Koeffizienten der Annahme- und Rückweisungskenngeraden zu den beiden oben angegebenen Beispielen bei approximativer und bei konservativer Rechnung sind in der folgenden Tabelle 3.4 angegeben.

Lösung	Bei- spiel	Koeffizienten		
		s_k	f_1	f_2
approximativ	(1)	40,0233	71,3925	71,3925
	(2)	40,0233	93,6094	72,1464
konservativ	(1)	40,0233	72,6362	72,6362
	(2)	40,0233	94,8531	72,6362

Tab. 3.4: Koeffizienten der Annahme- und Rückweisekenngeraden des Folgetestverfahrens nach WALD für ausgewählte Beispiele (Binomialmodell)

Wenn diese Koeffizienten in die Definitionsgleichungen (3.42) und (3.43) der Annahme- bzw. Rückweisungskenngeraden eingesetzt würden, würde man im Beispiel (1) bei

konservativer Lösung als Bedingung für die Annahme der H_0

$$y \geq 72,6362 + 40,0233 \cdot x \quad (x=0,1,\dots) \quad (3.51)$$

und als Bedingung für die Rückweisung der H_0

$$y \leq -72,6362 + 40,0233 \cdot x \quad (x=0,1,\dots) \quad (3.52)$$

erhalten. Da der Stichprobenumfang nicht negativ sein kann und darüber hinaus auch die Bedingung $y \geq x$ erfüllt sein muß, ist eine Rückweisung der Nullhypothese, wie man leicht zeigen kann, frühestens bei einer Fehlerzahl von zwei und einem Stichprobenumfang von $2 \leq y \leq 7$ Elementen möglich. Eine Annahme der Nullhypothese ist frühestens bei einem Stichprobenumfang von 72,63 bzw. aufgerundet 73 Elementen möglich. Diese Ergebnisse stimmen, wie zu erwarten war, mit den in der Tabelle 3.3 angegebenen Werten überein.

Die verschiedenen hier abgeleiteten Entscheidungsregeln unterscheiden sich zwar in ihrer äußeren Form sehr stark, sind jedoch inhaltlich völlig gleichbedeutend. Die Zuordnung eines beliebigen Punktes $P(x,y)$ zu einem der drei Entscheidungsbereiche (Weiterprüfungs-, Annahme- und Rückweisungsbereich) ist unabhängig von der angewandten Entscheidungsregel immer gleich. Dies ergibt sich daraus, daß jede dieser Entscheidungsregeln durch einfache Umformungen aus einer der anderen Regeln hergeleitet werden kann.

Die Art der angewandten Entscheidungsregel hat also auf das Ergebnis eines konkreten Tests oder auf die Eigenschaften des Folgetestverfahrens keinen Einfluß; sie bestimmt jedoch den bei der Durchführung und Auswertung eines Folgetests erforderlichen Aufwand. Im Modell der Binomialverteilung ist, wie bereits ausgeführt wurde, die Entscheidungsregel 2 der allgemeinen Entscheidungsregel deutlich überlegen und deshalb auch die in der

Literatur meistgebrauchte Form der Entscheidungsregel.¹ Vom Arbeitsaufwand noch günstiger ist jedoch die Entscheidungsregel 3: Während bei der Entscheidungsregel 2 für jedes entnommene Stichprobenelement die Werte für $c(y)$ und $d(y)$ neu bestimmt werden müssen, ist bei Anwendung der Entscheidungsregel 3 eine erneute Bestimmung von $a(x)$ und $r(x)$ nur erforderlich, wenn ein fehlerhaftes Element gefunden wird.²

Der Grund dafür, daß die Entscheidungsregel 3 in der Literatur praktisch unbekannt ist, dürfte darin liegen, daß sie weniger anschaulich ist als die Entscheidungsregel 2. Eine ausführlichere Abwägung der Vor- und Nachteile der verschiedenen Entscheidungsregeln bei alternativen Problemstellungen soll jedoch erst im Abschnitt 3.4 dieser Arbeit erfolgen.

Bevor alternative Konzepte zur Herleitung der Entscheidungsbereiche eines Folgetests im Modell der Hypergeometrischen Verteilung diskutiert werden, soll hier zunächst kurz auf die Möglichkeiten einer Approximation der Binomialverteilung eingegangen werden. Wie am Beispiel des einfachen Annahmestichprobenverfahrens dargestellt wurde, kann im Falle kleiner Fehleranteile die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximiert werden.³ Hiervon ausgehend sind in der Literatur die Entscheidungsbereiche von Folgetestverfahren unter der Annahme einer Poissonverteilung als Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe abgeleitet worden.⁴

1 Vgl. Seite 96 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 53.

3 Vgl. Seite 36 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

4 Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 54 f.; KARUS, H., a.a.O., S. 205 ff.

Der Wert der logarithmierten Prüfgröße lautet in diesem Falle¹

$$l(x;y) = x \cdot \ln \frac{\theta_A}{\theta_0} - y \cdot (\theta_A - \theta_0) , \quad (3.53)$$

wobei x wieder die Anzahl der bis zum Stichprobenumfang von y (einschließlich) gefundenen Fehler bezeichnet. Durch geeignete Umformungen der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens erhält man auch hier wieder die Gleichungen zweier paralleler Geraden (3.29) und (3.30) als Bereichsgrenzen. Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind im Poissonmodell als

$$s = \frac{\theta_A - \theta_0}{g_1} , \quad (3.54)$$

$$h_1 = \frac{-\ln B}{g_1} \quad (3.55)$$

und

$$h_2 = \frac{\ln A}{g_1} \quad (3.56)$$

definiert, wobei g_1 die in Gleichung (3.26) gegebene Hilfsgröße ist.²

Wenn die sogenannte Entscheidungsregel 2 zugrunde gelegt wird,³ erhält man im Beispiel (1) bei konservativer Lösung als Bedingung für die Annahme der H_0

$$x \leq -1,861353 + 0,024853 \cdot y \quad (y=1,2,\dots) \quad (3.57)$$

und als Bedingung für die Rückweisung der H_0

$$x \geq 1,861353 + 0,024853 \cdot y \quad (y=1,2,\dots). \quad (3.58)$$

1 Vgl. KARUS, H., a.a.O., S. 206 f.

2 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 54 f.

3 Vgl. Seite 93 ff. dieser Arbeit.

Die übrigen Koeffizienten können aus der folgenden Tabelle 3.5 abgelesen werden.

Lösung	Beispiel	Koeffizienten		
		s	h_1	h_2
approximativ	(1)	0,024853	1,829483	1,829483
	(2)	0,024853	2,398806	1,848801
konservativ	(1)	0,024853	1,861353	1,861353
	(2)	0,024853	2,430677	1,861353

Tab. 3.5: Koeffizienten der Annahme- und Rückweisegeraden des Folgetestverfahrens nach WALD für ausgewählte Beispiele (Poissonmodell)

Die Steigung der Bereichsgrenzen ist geringfügig kleiner als im Binomialmodell; die Ordinatenabschnitte der Bereichsgrenzen sind durchweg größer als die in der Tabelle 3.2 dargestellten Werte. Der Weiterprüfungsbereich ist also im Modell der Poissonverteilung breiter, d. h. der (durchschnittlich) entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang ist hier im allgemeinen größer als im Binomialmodell. Ein im Binomialmodell errechneter Folgetest ist vermutlich effizienter als ein im Poissonmodell errechneter Test. Da zudem die bei Verwendung der Poissonverteilung möglichen Rechenvereinfachungen bei der Berechnung der Koeffizienten minimal sind, kann eine Approximation durch die Poissonverteilung beim Folgetestverfahren nicht empfohlen werden und soll auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht mehr berücksichtigt werden.

3.3.3 Entscheidungsbereiche im Modell der Hypergeometrischen Verteilung

Wenn Hypothesen über den individuellen Fehleranteil θ bzw. über die Fehlerzahl M in einem konkreten Prüfungsfeld mit endlichem Umfang N getestet werden sollen, ist unter der Voraussetzung, daß die Entnahme ohne Zurücklegen erfolgt, die Fehlerzahl x in der Stichprobe hypergeometrisch verteilt.¹ Die zu testenden Hypothesen lauten in diesem Fall $H_0: M = M_0$ und $H_A: M = M_A$, wobei $0 \leq M_0 < M_A \leq N$ gelten muß. Zwischen der Fehlerzahl M und dem Fehleranteil θ im Prüfungsfeld (in der Grundgesamtheit) besteht die Beziehung

$$M = N \cdot \theta \quad (3.59)$$

mit $0 \leq \theta \leq 1$.

Grundlage ist auch hier die in Abschnitt 3.2 dieser Arbeit dargestellte allgemeine Entscheidungsregel ("Entscheidungsregel 1") des Folgetestverfahrens. Einen Ansatz zur Berechnung des durch Gleichung (3.2) definierten Wertes der Prüfgröße $L(x;y)$ ausgehend von dem Urnenmodell der Hypergeometrischen Verteilung leitet WALD ab.² Da diese Herleitung jedoch relativ kompliziert und umfangreich ist, sei auf eine Wiedergabe an dieser Stelle verzichtet. Der Wert der Prüfgröße $L(x;y)$ kann einfacher als Quotient der Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Hypergeometrischen Verteilung³

$$L(x;y) = \frac{f_H(x/N; y; M_A)}{f_H(x/N; y; M_0)} \quad (0 \leq x \leq y \leq N) \quad (3.60)$$

bestimmt werden, wobei die Wahrscheinlichkeitsfunktion als

1 Vgl. die Seiten 32 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 43 f.

3 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 55; WAGNER, G., Folgetest ..., a.a.O., S. 96.

$$f_H(x/N; n; M) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (x=0, 1, \dots, n) \quad (3.61)$$

definiert ist. Der Wert der Prüfgröße $L(x; y)$ ergibt sich somit nach weiteren Vereinfachungen als¹

$$L(x; y) = \frac{\binom{M_A}{x} \cdot \binom{N-M_A}{y-x}}{\binom{M_O}{x} \cdot \binom{N-M_O}{y-x}} \quad (0 \leq x \leq y \leq N) \quad (3.62)$$

Eine Berechnung des Wertes der Prüfgröße anhand der Gleichung (3.62) erscheint nur dann als sinnvoll, wenn die benötigten Binomialkoeffizienten aus Tabellen entnommen werden können.² In anderen Fällen kann, ausgehend von der Beziehung³

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)}{n!} \quad (3.63)$$

die Gleichung (3.62) zu

$$L(x; y) = \frac{M_A}{M_O} \cdot \frac{M_A-1}{M_O-1} \cdot \dots \cdot \frac{M_A-x+1}{M_O-x+1} \cdot \frac{N-M_A}{N-M_O} \cdot \frac{N-M_A-1}{N-M_O-1} \cdot \dots \cdot \frac{N-M_A-y+x+1}{N-M_O-y+x+1} \quad (3.64)$$

umgeformt werden. Auf eine ausführlichere Darstellung dieser Herleitung sei hier jedoch verzichtet. Auf der Grundlage von (3.64) kann der Wert der Prüfgröße $L(x; y)$ im Modell der Hypergeometrischen Verteilung rekursiv bestimmt werden:

¹ Vgl. GHOSH, B.K., a.a.O., S. 112.

² Ein Beispiel einer solchen Tabelle ist z. B. bei BLEYMÜLLER, GEHLERT, a.a.O., S. 101 abgedruckt.

³ Zur Definition der Binomialkoeffizienten vgl. ebenda, S. 101; FELLER, William, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I (3rd ed., revised printing), New York, London, Sydney o.J. (1970), S. 50 ff.

Den Wert der Prüfgröße nach der Entnahme von $y+1$ Elementen erhält man, wenn das letzte Element fehlerfrei ist, als

$$L(x; y+1) = \frac{N-M_A-y+x}{N-M_0-y+x} \cdot L(x; y) \quad (y=0,1,\dots,N; x \leq y) \quad (3.65)$$

und wenn das letzte Element fehlerhaft ist, als

$$L(x+1; y+1) = \frac{M_A-x}{M_0-x} \cdot L(x; y) \quad (y=0,1,\dots,N; x \leq y), \quad (3.66)$$

als Startwert dieser Rekursion wird $L(0;0) = 1$ definiert.

Nach jeder Entnahme wird der Wert der Prüfgröße neu berechnet und die Entscheidung über Weiterprüfung, Annahme oder Rückweisung der Nullhypothese wird anhand der allgemeinen Entscheidungsregel (3.5)¹ getroffen. Der Rechenaufwand kann bei Verwendung eines programmierbaren Taschenrechners erheblich verringert werden.

Eine Transformation dieser Entscheidungsregel und Auflösung der Ungleichungen nach x oder nach y wie im Modell der Binomialverteilung ist hier nicht möglich. Die Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ für einen vorgegebenen Stichprobenumfang von y können jedoch, wie im folgenden gezeigt werden soll, iterativ bestimmt werden. Ausgangspunkt der Herleitung ist die Tatsache, daß zu jedem beliebigen Punkt $P(x; y)$ die verschiedenen Formen der Entscheidungsregel zum gleichen Ergebnis führen müssen. Für einen vorgegebenen Stichprobenumfang y ist somit die Annahmehzahl $c(y)$ durch

$$L(c(y); y) \leq B < L(c(y)+1; y) \quad (y=1,2,\dots,N) \quad (3.67)$$

und die Rückweisezahl $d(y)$ durch

$$L(d(y); y) \geq A > L(d(y)-1; y) \quad (y=1,2,\dots,N) \quad (3.68)$$

bestimmt. Dies ist in Abbildung 3.4 veranschaulicht; die

¹ Vgl. Seite 82 dieser Arbeit. Die Verwendung dieser allgemeinen Entscheidungsregel wird auch von GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 55 vorgeschlagen.

Bedingungen (3.67) und (3.68) gelten unabhängig vom tatsächlichen Verlauf der Bereichsgrenzen.

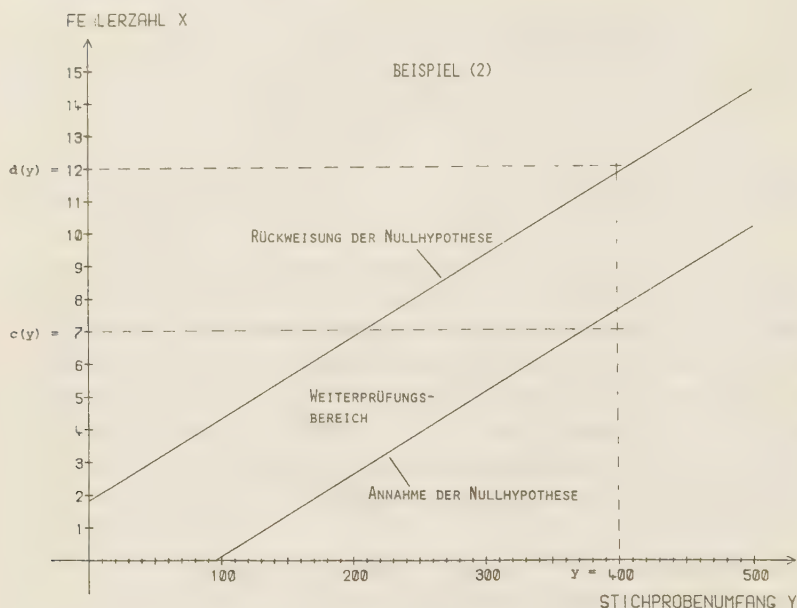


Abb. 3.4: Bestimmung der Annahme- und Rückweisezahlen beim Folgetestverfahren

In ähnlicher Weise kann man auch die Annahme- und Rückweisekennzahlen für eine vorgegebene Fehlerzahl x bestimmen, dies ist in Abbildung 3.5 grafisch dargestellt. Die Annahmekennzahl $a(x)$ ist durch

$$L(x; a(x)) \leq B < L(x; a(x)-1) \quad (x=0,1,\dots,M_0) \quad (3.69)$$

und die Rückweisekennzahl $r(x)$ durch

$$L(x; r(x)) \geq A > L(x; r(x)+1) \quad (x=0,1,\dots,M_0) \quad (3.70)$$

bestimmt, wobei $M_0 = N \cdot \theta_0$ gilt.

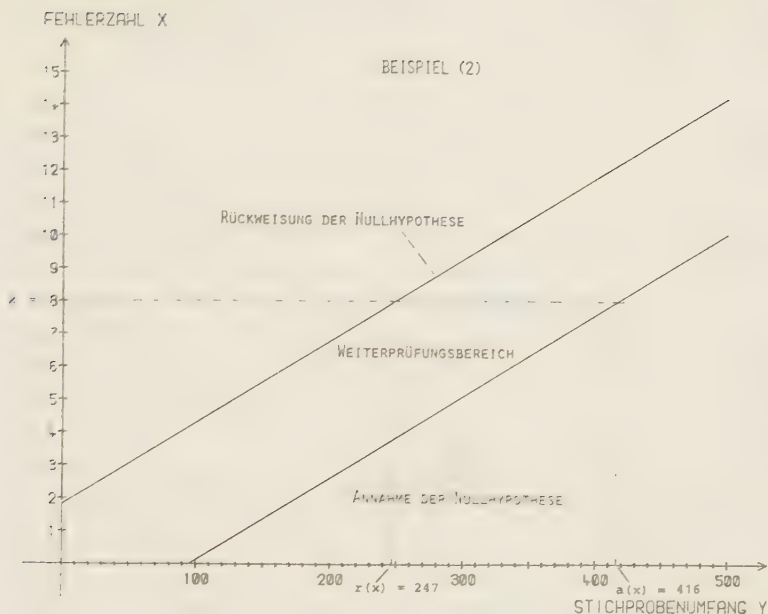


Abb. 3.5: Bestimmung der Annahme- und Rückweisekennzahlen beim Folgetestverfahren

Von den Bestimmungsgleichungen (3.67) und (3.68) bzw. (3.69) und (3.70) ausgehend können zu einem vorgegebenen Beispiel, das durch die Werte θ_0 , θ_A , α , β und N charakterisiert ist, die gewünschten Zahlen mit Hilfe eines Computers oder programmierbaren Klein- bzw. Taschenrechners relativ einfach iterativ bestimmt werden. Dabei ist, abhängig davon, welche Definition bei der Berechnung der kritischen Werte A und B zugrunde gelegt wird, wieder eine approximative oder eine konservative Lösung möglich. Eine Berechnung dieser Werte von Hand ist nicht sinnvoll, da der hierzu erforderliche Rechenaufwand sehr hoch ist.

Zur Veranschaulichung sind in der folgenden Abbildung 3.6 die sich zu den beiden Beispielen (1) und (2) bei einem angenommenen Umfang des Prüfungsfeldes von $N = 1000$ und konservativer Lösung ergebenden Entscheidungsbereiche

grafisch dargestellt. Die Annahme- und Rückweiskennzahlen dieser Tests sind zudem in der Tabelle 3.6 auf Seite 122 dieser Arbeit angegeben.

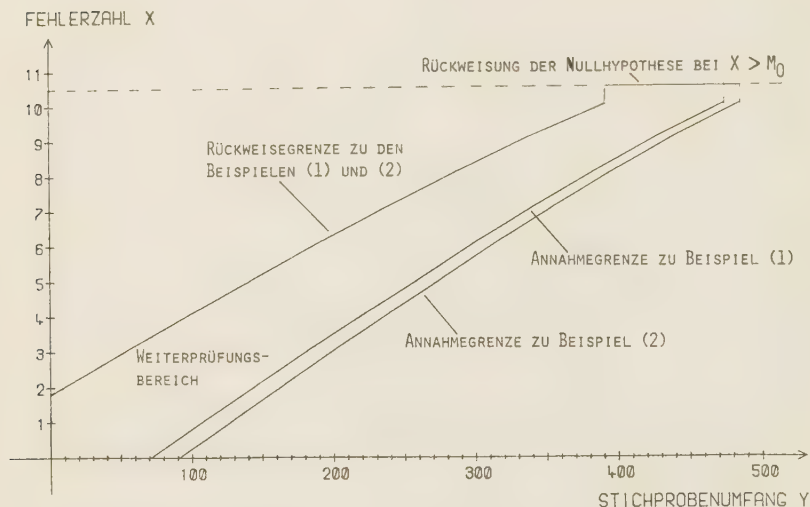


Abb. 3.6: Entscheidungsbereiche von Folgetests zu ausgewählten Beispielen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung

Da hier die konservative Lösung gewählt wurde, stimmen die Rückweiskgrenzen der beiden Beispiele hier exakt überein. Man erkennt, daß die Bereichsgrenzen geschlossen sind und daß spätestens mit dem Auffinden des elften Fehlers ein Zufallsweg den Weiterprüfungsbereich verläßt.

Allgemein gilt, daß bei M_0+1 Fehlern die Nullhypothese mit Sicherheit - unabhängig von den für α und β vorgegebenen Werten - zurückgewiesen wird,¹ weil in diesem Fall, wie man anhand der Gleichungen (3.63) oder (3.65) leicht sieht, der Nenner der Prüfgröße $L(x;y)$ Null und der Wert der

¹ Vgl. WAGNER, G., Folgetest ..., a.a.O., S. 98.

Prüfgröße Unendlich wird. Es gilt also

$$L(M_0+1; y) \rightarrow \infty \quad (y=M_0+1, M_0+2, \dots, N) \quad (3.71)$$

Die Bereichsgrenzen sind in der Abbildung 3.6 als Linienzüge (Polygone) gezeichnet worden, weil so ein Vergleich der Bereichsgrenzen der beiden Beispiele untereinander oder mit den bisher behandelten Grenzen im Binomialmodell am einfachsten möglich ist. Wenn dagegen der diskrete Charakter der Bereichsgrenzen betont werden soll, ist eine Darstellung in Form einer Treppenfunktion besser geeignet; ein Beispiel hierfür gibt die Abbildung 3.10 auf Seite 133 dieser Arbeit.¹

Von den bislang hier dargestellten Lösungsmöglichkeiten bei Annahme der Hypergeometrischen Verteilung hat bislang meines Wissens noch keine Eingang in die Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen gefunden. Statt dessen wird in dieser Literatur stillschweigend oder ausdrücklich die Approximation der Hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung mit den Parametern n und $\theta = \frac{M}{N}$ unterstellt.² Diese Approximation

$$f_H(x/N; n; M) \approx f_B(x/n; \frac{M}{N}) \quad (3.72)$$

1 Die beiden hier genannten Darstellungsformen können natürlich auch kombiniert werden; vgl. CHUNG, J.H., Sequential Sampling from Finite Lots when the Proportion Defective is Small, JASA 45 (1950), S. 566.

2 Vgl. zu den folgenden Ausführungen z. B. SCHULTE, E., a.a.O., S. 132 f.; WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 127 f.; ders., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 494 bzw. 105; BUCHNER, REUTER, a.a.O., S. 544; BRETZKE, Wolf-Rüdiger, HÖVERMANN, Klaus, LÜCHERBACH, Gerhard, Zur Problematik der Verteilungshypothesen bei der Anwendung von Stichprobenverfahren im Rahmen von Unternehmensprüfungen. BFuP, 24 (1972), S. 637 f.; HÖVERMANN, K., Phasen der Gewinnung stichprobenfundierter Prüfurteile bei Jahresabschlußprüfungen. WPg 29 (1976), S. 261 f.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

ist ausreichend genau, solange der Auswahlssatz klein ist (Faustregel $\frac{n}{N} < 0,05$).¹ In der Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen wird diese Approximation oft auch für größere Auswahlssätze bis 0,1 zugelassen.²

Bei Verwendung dieser Approximation, die im folgenden als "Approximation 1" bezeichnet werden soll, erhält man für die Prüfgröße $L(x;y)$ die bereits in Punkt 3.3.2 dieser Arbeit hergeleitete Beziehung (3.22), wobei $\theta_0 = M_0/N$ und $\theta_A = M_A/N$ gelten. Die Annahme- und Rückweisergeraden $c(y)$ bzw. $d(y)$ stimmen somit exakt mit den im Binomialmodell berechneten Geraden überein, unabhängig vom Umfang N des Prüfungsfeldes. Auf eine Wiederholung der in Punkt 3.2.2 abgeleiteten Ergebnisse sei jedoch verzichtet.

Zu beachten ist, daß hier, im Gegensatz zum Folgetest im Binomialmodell, eine zusätzliche Entscheidungsregel existiert: Die Entnahme kann abgebrochen und die Nullhypothese kann mit Sicherheit zurückgewiesen werden, wenn mehr als $M_0 = N \cdot \theta_0$ fehlerhafte Elemente in der Stichprobe auftreten. Durch diese zusätzliche Entscheidungsregel

$$\text{Rückweisung der } H_0, \text{ wenn } x > M_0 + 1 \quad (3.73)$$

erhält man somit auch bei Verwendung der Binomialapproximation (3.72) ("Approximation 1") geschlossene Bereichsgrenzen. Diese Tatsache wird in der Literatur im allgemeinen übersehen.

Die Ansichten über die Anwendbarkeit der hier dargestellten Approximation divergieren in der Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen stark. BRETZKE, HÖVERMANN und LÖCHERBACH haben darauf hingewiesen, daß

1 Vgl. die Ausführungen auf Seite 35 ff. dieser Arbeit sowie BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 54 f.

2 Vgl. HÖVERMANN, K., a.a.O., S. 261; BRETZKE, HÖVERMANN, LÖCHERBACH, a.a.O., S. 638; WYSOCKI, K. v., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 494 bzw. S. 105; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

beim Folgetestverfahren die Qualität dieser Approximation mit zunehmendem Stichprobenumfang y ständig abnimmt.¹ Da bei dieser Approximation die Bereichsgrenzen parallel sind, d. h. der Weiterprüfungsbereich offen ist, ist das Auftreten von Stichprobenumfängen, durch die die oben angegebene Approximationsbedingung verletzt wird, nicht ausgeschlossen. Sobald der Stichprobenumfang größer als $0,1 \cdot N$ ist, empfehlen BRETZKE, HÖVERMANN und LÖCHERBACH den Abbruch des Folgetests und Übergang zum einfachen Annahmestichprobenverfahren.² An anderer Stelle wird jedoch trotz der hier geäußerten Bedenken die Verwendung der oben genannten Approximation (3.72) als zulässig erachtet.³

Eine abschließende Klärung dieses Problems ist bislang offensichtlich noch nicht möglich. Die hier angesprochenen Probleme können jedoch durch die Verwendung einer besser geeigneten Approximation relativ einfach umgangen werden, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Die Hypergeometrische Verteilung kann im Falle kleiner Fehleranteile (Faustregel $\frac{M}{N} < 0,1$) besser als mit dem bisher dargestellten Verfahren durch die Binomialverteilung mit den Parametern M und $\frac{n}{N}$ approximiert werden.⁴ Bei dieser Approximation

$$F_H(x/N; n; M) \approx F_B(x/M; \frac{n}{N}) \quad (3.74)$$

sind gegenüber der sonst üblichen Approximation M und n vertauscht. Bei Verwendung dieser Beziehung erhält man

-
- 1 Vgl. BRETZKE, HÖVERMANN, LÖCHERBACH, a.a.O., S. 638 ff.
 - 2 Vgl. ebenda, S. 640 f.; HÖVERMANN, K., a.a.O., S. 262 f.
 - 3 Vgl. WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 127 f. und die dort angegebene Literatur.
 - 4 Vgl. COGGINS, P.P., Some general Results of Elementary Sampling Theory for Engineering ..., Bell System Technical Journal 7 (1928), S. 44 (zitiert bei WAGNER, G., Folgetest ..., a.a.O., S. 96); vgl. auch WETZEL, Wolfgang, JÖHNK, Max-Detlev, NAEVE, Peter, Statistische Tabellen, Berlin 1967, S. 23 f.

$$L(x;y) \approx \frac{\binom{M_A}{x}}{\binom{M_0}{x}} \cdot \left(1 - \frac{y}{N}\right)^{M_A - M_0} \quad (3.75)$$

als Näherung für die Prüfgröße des Folgetestverfahrens.¹
Diese Gleichung kann unter Verwendung der Beziehung (3.63) auch in der Form

$$L(x;y) \approx \frac{M_A(M_A-1) \dots (M_A-x+1)}{M_0(M_0-1) \dots (M_0-x+1)} \cdot \left(1 - \frac{y}{N}\right)^{M_A - M_0} \quad (3.76)$$

geschrieben werden.

Die Durchführung und Auswertung eines Folgetests anhand der allgemeinen Entscheidungsregel (3.5), die nach der Entnahme jedes Elementes eine Neuberechnung der Prüfgröße $L(x;y)$ erfordert, ist relativ aufwendig. Eine Transformation und Auflösung dieser Entscheidungsregel nach der Fehlerzahl x ist nicht möglich; jedoch kann die Entscheidungsregel nach dem Stichprobenumfang y aufgelöst werden.

Zur Vereinfachung der Herleitung sollen die Hilfsgrößen

$$K = \frac{1}{M_A - M_0} = \frac{1}{N \cdot (\theta_A - \theta_0)} \quad (3.77)$$

und

$$Q(x) = \frac{M_A(M_A-1) \dots (M_A-x+1)}{M_0(M_0-1) \dots (M_0-x+1)} \quad (x=0,1,\dots,M_0) \quad (3.78)$$

eingeführt werden. Die Bedingung für Weiterprüfung lautet dann

$$B < Q(x) \cdot \left(1 - \frac{y}{N}\right)^{1/K} < A \quad (x=0,1,\dots,M_0) \quad (3.79)$$

wobei A und B die kritischen Werte der allgemeinen Entscheidungsregel bezeichnen. Diese Beziehung läßt sich umformen zu

¹ Vgl. WAGNER, G., Folgetest ..., a.a.O., S. 97.

$$\left(\frac{B}{Q(x)}\right)^K < 1 - \frac{Y}{N} < \left(\frac{A}{Q(x)}\right)^K$$

bzw. nach einigen weiteren Schritten zu

$$N \cdot \left[1 - \left(\frac{B}{Q(x)}\right)^K \right] > Y > N \left[1 - \left(\frac{A}{Q(x)}\right)^K \right]. \quad (3.80)$$

Die Bereichsgrenzen sind bei dieser Form der Entscheidungsregel (Entscheidungsregel 3) nichtlineare Funktionen der Fehlerzahl x . Die Annahmekennzahlen sind durch

$$a(x) \approx N \cdot \left[1 - \left(\frac{B}{Q(x)}\right)^K \right] \quad (x=0,1,\dots,M_0) \quad (3.81)$$

und die Rückweisekennzahlen durch

$$r(x) \approx N \cdot \left[1 - \left(\frac{A}{Q(x)}\right)^K \right] \quad (x=0,1,\dots,M_0) \quad (3.82)$$

gegeben. Die Berechnung dieser Kennzahlen ist bei Verwendung eines programmierbaren Rechners oder Computers sehr einfach möglich; die Entscheidung über Weiterprüfung, Annahme oder Rückweisung der Nullhypothese erfolgt dann anhand der Entscheidungsregel 3.¹

Das zuletzt dargestellte Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Bereichsgrenzen eines Folgetests im Modell der Hypergeometrischen Verteilung soll als "Approximation 2", der im folgenden zu erläuternde Lösungsweg nach WAGNER als "Approximation 3" bezeichnet werden. Die Lösung nach WAGNER beruht ebenfalls auf der von COGGINS gefundenen Approximation (3.72) der Hypergeometrischen durch die Binomialverteilung.² Im Gegensatz zu der oben hergeleiteten Lösung empfiehlt WAGNER die Verwendung linearer Bereichsgrenzen.

¹ Vgl. S. 100 ff. dieser Arbeit.

² Vgl. zu den folgenden Ausführungen WAGNER, G., Folgetest ..., a.a.O., S. 98 ff.; SCHINDOWSKI, Egon, SCHÜRZ, Otto, Statistische Qualitätskontrolle, Kontrollkarten und Stichprobenpläne (4. Aufl.), Berlin o.J. (1966), S. 391 ff.

Die Koeffizienten dieser Bereichsgrenzen werden so bestimmt, daß die Funktionswerte von $a(x)$ und $r(x)$ an den Stellen $x=0$ und $x=1$ mit den durch die Beziehungen (3.81) und (3.82) definierten Werten übereinstimmen. Als Gleichungen dieser Geraden leitet WAGNER

$$a(x) \approx N \cdot (1 - B^K) + N \cdot B^K \cdot \left[1 - \left(\frac{M_0}{M_A} \right)^K \right] \cdot x \quad (3.83)$$

bzw.

$$r(x) \approx N \cdot (1 - A^K) + N \cdot A^K \cdot \left[1 - \left(\frac{M_0}{M_A} \right)^K \right] \cdot x \quad (3.84)$$

ab.¹ Für die kritischen Werte A und B können auch hier wieder wahlweise die approximativen oder die konservativen Definitionen zugrunde gelegt werden.²

Diese von WAGNER hergeleiteten Geradengleichungen besitzen, wenn eine grafische Darstellung der Entscheidungsbereiche erfolgen soll, gegenüber den bisher dargestellten Verfahren deutliche Vorzüge. Eine Konstruktion dieser Geraden ist ausgehend von den Abszissenabschnitten $a(0)$ und $r(0)$ und ihrem gemeinsamen Schnittpunkt mit den Koordinaten

$$x_s = \frac{1}{1 - \left(\frac{M_0}{M_A} \right)^K} \approx \frac{\theta_A - \theta_0}{\ln \frac{\theta_A}{\theta_0}} \cdot N + 0,5 \quad (3.85)$$

und

$$y_s = a(x_s) = r(x_s) = N \quad (3.86)$$

leicht möglich.³ Die zur Berechnung von x_s angegebene Näherungsformel ist im Falle $N > 100$ und $\theta_0 = M_0/N \leq 0,1$ und $\theta_A = M_A/N \leq 0,1$ "genügend genau".⁴

1 Vgl. WAGNER, G., Folgetest ..., a.a.O., S. 98;
SCHINDOWSKI, SCHÜRZ, a.a.O., S. 392 f.

2 Vgl. S. 84 ff. dieser Arbeit.

3 Vgl. WAGNER, G., Folgetest ..., a.a.O., S. 99.

4 Ebenda, S. 99.

Bevor die bisher aufgeführten Approximationslösungen anhand der Beispiele (1) und (2) untereinander und mit der exakten Lösung verglichen werden sollen, ist als weitere interessante Alternative noch eine von CHUNG entwickelte Approximation der (logarithmierten) Prüfgröße $l(x;y)$ im Modell der Hypergeometrischen Verteilung darzustellen.¹ CHUNG findet unter der Annahme, daß die Hypothesenwerte M_0 und M_A klein im Verhältnis zum Umfang der Grundgesamtheit (des Prüfungsfeldes) ist, zwei mögliche Approximationsbeziehungen, von denen die genauere

$$l(x;y) \approx \ln M_A! - \ln M_0! + \ln (M_0-x)! - \ln (M_A-x)! + \\ + (M_A-M_0) \cdot \left[\ln (N-M_0+N-M_A+1+2x-2y) \right. \\ \left. - \ln (N-M_0+N-M_A+1) \right] \quad (3.87)$$

lautet.² Als Entscheidungsregel empfiehlt CHUNG eine modifizierte Form der allgemeinen Entscheidungsregel in logarithmischer Form (3.6), die nach jeder Entnahme eine Neuberechnung der Prüfgröße erfordert.³ Wie im folgenden zu zeigen ist, kann die von CHUNG angegebene Entscheidungsregel jedoch ähnlich wie die oben dargestellte "Approximation 2" weiter umgeformt und vereinfacht werden.

1 Die hier getroffene Auswahl erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. So hat beispielsweise auch GHOSH eine Approximation der (logarithmierten) Prüfgröße $l(x;y)$ entwickelt, die jedoch nur eine Entscheidung anhand der Entscheidungsregel 1 (3.6) zuläßt und somit rechenaufwendiger als die in dieser Arbeit darzustellenden Approximationen ist: vgl. GHOSH, B.K., a.a.O., S. 112. Weitere mögliche Approximationen der Hypergeometrischen Verteilung, die zu einer näherungsweisen Bestimmung der Prüfgröße $L(x;y)$ verwendet werden könnten, geben z. B. HALD, A., The Determination ..., a.a.O., S. 413 ff.; ders., A Note on ..., a.a.O., S. 212 f. und die jeweils dort angegebene Literatur.

2 Vgl. CHUNG, J.H., a.a.O., S. 557 ff.

3 Vgl. ebenda, S. 558 f.

Ausgehend von der Beziehung (3.87) erhält man

$$l(x; y) \approx \ln \frac{M_A! \cdot (M_O - x)!}{M_O! \cdot (M_A - x)!} + (M_A - M_O) \cdot \ln \frac{N - M_O + N - M_A + 1 + 2x - 2y}{N - M_O + N - M_A + 1}$$

bzw. nach einigen Umformungen und Bildung des Antilogarithmus

$$L(x; y) \approx \left(\frac{x}{M_O} \right)^{\left(\frac{M_A}{M_O} \right)} \cdot \left(1 - \frac{2(y-x)}{2N - M_O - M_A + 1} \right)^{M_A - M_O} \quad (3.88)$$

als Näherung für die Prüfgröße des Folgetestverfahrens. Die Ähnlichkeit dieser Näherungsformel zu der Beziehung (3.75) bei Verwendung der Approximation nach COGGINS ist offensichtlich.

Unter Berücksichtigung der auf Seite 116 dieser Arbeit eingeführten Hilfsgrößen K und Q(x) erhält man als Bedingung für Weiterprüfung

$$B < Q(x) \cdot \left(1 - \frac{2(y-x)}{2N - M_O - M_A + 1} \right)^{1/K} < A \quad (3.89)$$

oder, nach einigen Umformungen,

$$1 - \left(\frac{B}{Q(x)} \right)^K > \frac{2(y-x)}{2N - M_O - M_A + 1} > 1 - \left(\frac{A}{Q(x)} \right)^K$$

bzw. nach weiteren Umformungen

$$\frac{2N - M_O - M_A + 1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{B}{Q(x)} \right)^K \right] + x > y > \frac{2N - M_O + M_A + 1}{2} \left[1 - \left(\frac{A}{Q(x)} \right)^K \right] + x \quad (3.90)$$

Als Bereichsgrenzen erhält man bei dieser Lösung, die im folgenden als "Approximation 4" bezeichnet werden soll, nichtlineare Funktionen der Fehlerzahl x. Die Annahmekennzahlen sind durch

$$a(x) \approx \frac{2N-M_0-M_A+1}{2} \left[1 - \left(\frac{B}{Q(x)} \right)^K \right] + x$$

(x=0,1,...,M₀) (3.91)

und die Rückweisekennzahlen durch

$$r(x) \approx \frac{2N-M_0-M_A+1}{2} \left[1 - \left(\frac{A}{Q(x)} \right)^K \right] + x$$

(x=0,1,...,M₀) (3.92)

gegeben. Diese Beziehungen besitzen relativ große Ähnlichkeit mit den bei der "Approximation 2" hergeleiteten Beziehungen (3.81) und (3.82).

Anhand der auf Seite 40 dieser Arbeit vorgegebenen Beispiele (1) und (2) sollen diese vier verschiedenen vorgestellten Approximationslösungen mit den exakt berechneten Bereichsgrenzen verglichen werden. Wie auf Seite 111 ff. dieser Arbeit sollen dabei ein Umfang der Grundgesamtheit von N = 1000 und konservative Definition der kritischen Werte A und B unterstellt werden.

Berechnet wurden jeweils die Annahme- und Rückweisekennzahlen a(x) bzw. r(x) für alternative Fehlerzahlen x=0,1,...,M₀=10. Die Kennzahlen bei der "Approximation 1" wurden unter Verwendung der in der Tabelle 3.4 angegebenen Koeffizienten der Bereichsgrenzen im Binomialmodell bestimmt. Bei der "Approximation 3" nach WAGNER erhält man aus den Beziehungen (3.83) und (3.84) für die Bereichsgrenzen zu Beispiel (1)

$$a(x) \approx 72,1575 + 36,5915 x \quad (x=0,1,\dots,10)$$

und

$$r(x) \approx -77,7692 + 42,5042 x \quad (x=0,1,\dots,10)$$

(3.93)

und zu Beispiel (2)

$$a(x) \approx 93,1703 + 35,7629 x \quad (x=0,1,\dots,10)$$

und

$$r(x) \approx -77,7692 + 42,5042 x \quad (x=0,1,\dots,10)$$

(3.94)

Die durch die Beziehungen (3.83) bzw. (3.91) definierten Werte für $a(x)$ sollen auf die nächstgrößere ganze Zahl aufgerundet, die durch (3.84) bzw. (3.92) definierten Werte für $r(x)$ auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet werden. Durch diese Rundung werden die Eigenschaften des Folgetests nicht verändert.

Auf die Darstellung weiterer Zwischenergebnisse sei hier verzichtet, da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Die errechneten Kennzahlen sind in der Tabelle 3.6 sowie in der Abbildung 3.7 angegeben. Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit sind die Bereichsgrenzen in dieser Abbildung als Linienzüge (Polygone) gezeichnet worden.

Bei- spiel	x	exakte Lösung		Approximationen							
				1		2		3		4	
		a(x)	r(x)	a(x)	r(x)	a(x)	r(x)	a(x)	r(x)	a(x)	r(x)
(1)	0	71	-	73	-73	73	-78	73	-78	71	-76
	1	107	-	113	-33	109	-36	109	-36	107	-34
	2	144	9	153	7	146	7	146	7	144	9
	3	181	52	193	47	184	51	182	49	181	52
	4	219	96	233	87	222	95	219	92	219	96
	5	258	141	273	127	260	140	256	134	258	141
	6	297	186	313	167	300	186	292	177	297	186
	7	338	233	353	207	341	233	329	219	338	233
	8	380	282	393	247	383	282	365	262	380	282
	9	425	334	433	287	428	335	402	304	425	334
	10	475	392	473	327	479	394	439	347	475	392
(2)	0	91	-	95	-73	94	-78	94	-78	91	-76
	1	127	-	135	-33	129	-36	129	-36	127	-34
	2	163	9	175	7	166	7	165	7	163	9
	3	199	52	215	47	202	51	201	49	199	52
	4	236	96	255	87	239	95	237	92	236	96
	5	274	141	295	127	277	140	272	134	274	141
	6	312	186	335	167	316	186	308	177	312	186
	7	352	233	376	207	356	233	344	219	352	233
	8	393	282	416	247	397	282	380	262	393	282
	9	437	334	456	287	441	335	416	304	437	334
	10	486	392	496	327	491	394	451	347	486	392

Tab. 3.6: Annahme- und Rückweisekennzahlen von Folgetests zu ausgewählten Beispielen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung

Man erkennt, daß die Approximation 2 (nach COGGINS) gut und die Approximation 4 (nach CHUNG) sehr gut mit den iterativ berechneten exakten Werten übereinstimmt. Die mit Hilfe der Approximationen 1 (übliche Binomialapproximation) und 3 (nach WAGNER) errechneten Bereichsgrenzen unterscheiden sich dagegen deutlich von den exakten Werten.

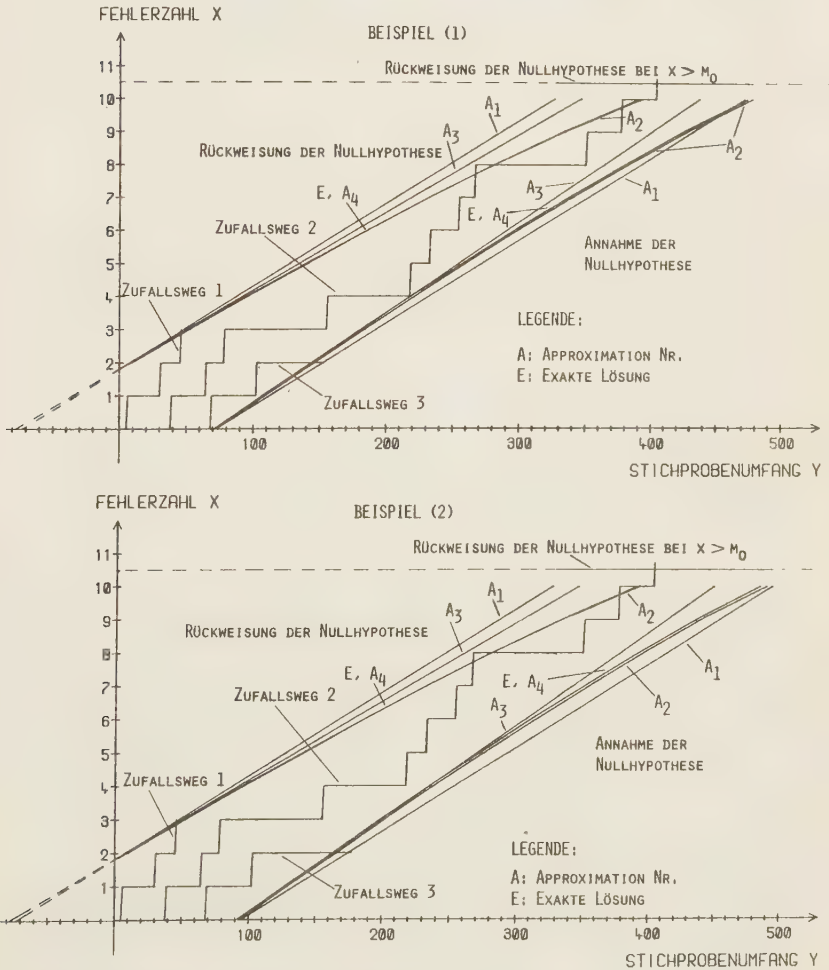


Abb. 3.7: Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege zu ausgewählten Beispielen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung

Die Bereichsgrenzen bei Approximation 1 umschließen die exakten Bereichsgrenzen fast vollständig und geben so zu der Vermutung Anlaß, daß es sich hier, ähnlich wie im Falle der einfachen Annahmestichprobe,¹ um eine konservative Approximation handeln könnte. Dagegen werden die Abweichungen zwischen den exakten Grenzen und den ausgehend von der Approximation 3 (nach WAGNER) berechneten Werten mit zunehmendem Stichprobenumfang immer größer. Da die Richtung dieser Abweichungen zumindest für größere Fehlerzahlen x einheitlich ist, kann man vermuten, daß bei Verwendung der Approximation 3 die Annahmewahrscheinlichkeit der Nullhypothese tendenziell größer und die Rückweisewahrscheinlichkeit der H_0 tendenziell kleiner als bei exakter Lösung ist. Beispiele für Zufallswege, die bei der Approximation 3 zur Annahme und bei exakter Lösung zur Zurückweisung der Nullhypothese führen, sind in der Abbildung 3.7 dargestellt.

Aussagen über den Einfluß dieser Abweichungen auf die Wahrscheinlichkeiten eines α - bzw. eines β -Fehlers sind an dieser Stelle noch nicht möglich, könnten jedoch zum Beispiel mit Hilfe des in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit zu behandelnden Rekursionsverfahrens abgeleitet werden.

Bevor jedoch allgemeingültige Ergebnisse über die Zulässigkeit der verschiedenen Approximationen vorliegen, kann hier nur die Verwendung der Approximation 4 (nach CHUNG) empfohlen werden. Diese ist von den hier vorgestellten die mit Abstand genaueste Approximation: die näherungsweise berechneten Kennzahlen stimmen mit den exakten Werten in den meisten Fällen genau überein, zumindest in der grafischen Darstellung ist kein Unterschied feststellbar. Der Rechenaufwand beträgt nur einen Bruchteil des zur iterativen Berechnung der exakten Kennzahlen erforderlichen Rechenaufwandes.

¹ Vgl. S. 35 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

Als Nachteil dieses Approximationsverfahrens könnte empfunden werden, daß es keine direkte Berechnung der Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ als Funktion des Stichprobenumfangs y gestattet. Jedoch können ausgehend von einer Tabelle der Annahme- und Rückweisekennzahlen $a(x)$ und $r(x)$ ($x=0,1,\dots,M_0$) die gesuchten Werte relativ einfach bestimmt werden, wie anhand der folgenden Abbildung 3.8 dargestellt werden soll.

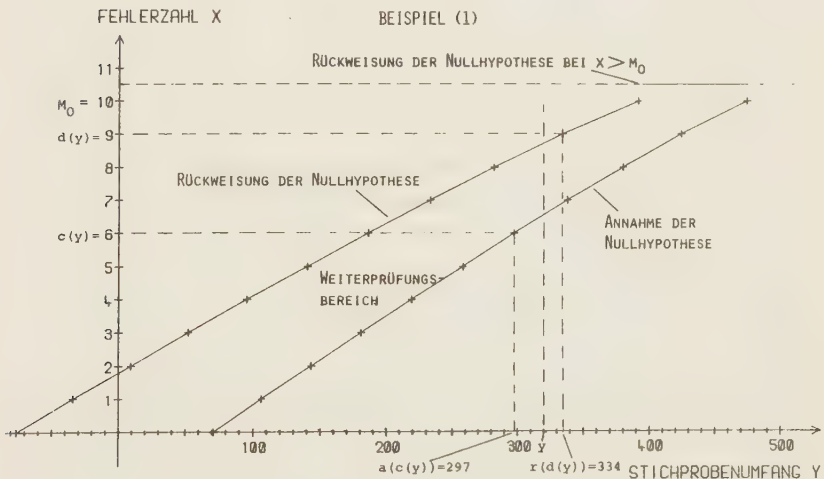


Abb. 3.8: Annahme- und Rückweisezahlen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung

Die Annahmezahl $c(y)$ ist durch

$$a(c(y)) \leq y < a(c(y)+1) \quad (y=1,2,\dots) \quad (3.95)$$

und die Rückweisezahl

$$r(d(y)) \geq y > r(d(y)-1) \quad (y=1,2,\dots) \quad (3.96)$$

bestimmt.

Zur Verdeutlichung sollen hier die Annahme- und Rückweisezahlen zu Beispiel (1) (konservative Lösung) für einen Stichprobenumfang von $y = 100$ bestimmt werden. Aus der Tabelle 3.6 ergibt sich bei Verwendung der Approximation 4 (nach CHUNG)

$$a(0) = 73 \leq y < a(1) = 113 \text{ und damit } c(100) = 0$$

sowie

$$r(5) = 127 \geq y > r(4) = 87 \text{ und damit } d(100) = 5 .$$

Die Annahme- und Rückweisezahlen für andere Stichprobenumfänge werden analog bestimmt. Für $y < a(0)$ ist eine Annahme der Nullhypothese nicht möglich, die Annahmezahl ist negativ.

Wie in den vorangegangenen Ausführungen erläutert wurde, sollen im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur die folgenden Konzepte zur Definition von Bereichsgrenzen beim Folgetestverfahren nach WALD berücksichtigt werden: Wenn die zu testenden Fehleranteile θ_0 und θ_A als "individuelle" Fehleranteile eines konkreten Prüfungsfeldes interpretiert werden, ist die Hypergeometrische Verteilung modellkonform. In dieser Arbeit sollen entweder die übliche Binomialapproximation ("Approximation 1") oder vorzugsweise die Approximation nach CHUNG ("Approximation 4") zugrunde gelegt werden. In beiden Fällen ist die Nullhypothese zurückzuweisen, sobald mehr als $M_0 = N \cdot \theta_0$ Fehler in der Stichprobe auftreten. Wenn die zu testenden Fehleranteile dagegen als "durchschnittliche" Fehleranteile interpretiert werden, ist die Binomialverteilung modellkonform. In diesem Fall ist der Weiterprüfungsbereich offen, die Bereichsgrenzen sind parallele Geraden.

Zur Unterscheidung der verschiedenen Interpretationen der zu testenden Fehleranteile sollen im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Begriffe "Modell der Hypergeometrischen Verteilung" bzw. "Modell der Binomialverteilung" oder "Binomialmodell" verwendet werden.

3.4 Technik der Testdurchführung und -auswertung beim Folgetestverfahren nach WALD

In den vorangegangenen Abschnitten ist dargelegt worden, daß es zur Durchführung von Folgetests grundsätzliche verschiedene mögliche Entscheidungsregeln gibt, die zwar sachlich gleichbedeutend sind, jedoch eine unterschiedliche Entscheidungstechnik und einen unterschiedlichen Aufwand bei der Durchführung und Auswertung eines Folgetests erfordern können. Dieser Aufwand ist, wie in diesem Abschnitt zu zeigen sein wird, vor allem davon abhängig, welche der drei möglichen Entscheidungsregeln angewandt werden soll und ob eine grafische oder tabellarische Stichprobenauswertung gewünscht wird. Daneben sollen auch die Auswirkungen einer Stichprobenentnahme in Gruppen diskutiert werden. Den Abschluß dieses Abschnitts bilden Empfehlungen zur Konstruktion von Tabellen, die eine einfache Stichprobenauswertung beim Folgetestverfahren ermöglichen.

Im Modell der Binomialverteilung ist eine Entscheidung anhand der allgemeinen Entscheidungsregel nach WALD ("Entscheidungsregel 1"), die nach der Entnahme jedes Stichprobenelementes eine Neuberechnung der Prüfgröße $L(x;y)$ erfordert, nicht sinnvoll. In der Literatur wird fast einstimmig die Bestimmung der Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ als Funktion des Stichprobenumfangs y empfohlen; die Entscheidung wird dann durch Vergleich der bis zu einem Umfang von y (einschließlich) gefundenen Fehlerzahl x mit den Werten von $c(y)$ bzw. $d(y)$ getroffen ("Entscheidungsregel 2").¹ Die Bereichsgrenzen sind im Modell der Binomialverteilung parallele Geraden und können deshalb sehr leicht in einem Schaubild grafisch dargestellt werden. Ein solches Schaubild kann zum Zwecke einer grafischen Stichprobenauswertung verwendet werden: Dazu müssen die bei der Überprüfung der einzelnen Stich-

¹ Vgl. S. 94 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

probenelemente gefundenen Ergebnisse in Form eines Zufallsweges in das Schaubild eingezeichnet werden. Sobald dieser Zufallsweg eine der beiden Bereichsgrenzen erreicht, ist die Entnahme beendet.¹

Ein Beispiel einer solchen grafischen Stichprobenauswertung ist in der Abbildung 3.2 auf Seite 95 dieser Arbeit dargestellt. Der Vorteil der grafischen Auswertung beim Folgetestverfahren ist, daß sie sehr elegant und anschaulich ist; ein Nachteil ist, daß die erreichbare Genauigkeit, vor allem wenn sehr große Stichprobenumfänge auftreten sollten, begrenzt ist. Wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit darzustellen sein wird, dürften die Auswirkungen eventueller Ableseungenauigkeiten jedoch vernachlässigbar sein; die Gefahr der Überschreitung der zulässigen Fehlerwahrscheinlichkeiten ist, vor allem bei konservativer Definition der kritischen Werte A und B, minimal.

Als Alternative zur grafischen wird in der Literatur die tabellarische Stichprobenauswertung empfohlen.² Dazu werden vor Beginn der Stichprobenauswertung die Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ und $d(y)$ ($y=1,2,\dots$) errechnet und in tabellarischer Form angegeben, wobei die Annahmezahlen $c(y)$ ($y=1,2,\dots$) stets auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet und die Rückweisezahlen $d(y)$ auf die nächstgrößere ganze Zahl aufgerundet werden.³

1 Vgl. z. B. WYSOCKI, Kl. v., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 494 ff. (bzw. S. 106 ff.); ders., Grundlagen ..., a.a.O., S. 130 f.; LEFFSON, U., a.a.O., S. 183 f.; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 62 f.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 135 f.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 114.

2 Vgl. z. B. LEFFSON, U., a.a.O., S. 184; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 68 f. und S. 119 ff.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 136 ff.; WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 131 f.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 112 ff.

3 Vgl. SCHULTE, E., a.a.O., S. 136; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 69; WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 132.

Eine vollständige tabellarische Erfassung der Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ eines bestimmten Folgetests, der durch die Parameter θ_0 und θ_A und die kritischen Werte A und B definiert ist, ist jedoch im allgemeinen nicht möglich. Ein Grund hierfür ist, daß die im betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen üblichen Fragestellungen oft relativ große entscheidungsnotwendige Stichprobenumfänge erfordern, ein weiterer Grund ist, daß im Modell der Binomialverteilung die Bereichsgrenzen offen sind und eine obere Abbruchgrenze nicht definiert ist.

Zur Verringerung des Tabellieraufwandes wird deshalb in der Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen im allgemeinen eine Tabellierung nur für Gruppen von Stichprobenelementen mit konstantem Umfang n_d dargestellt.¹ Dabei wird, in Anlehnung an einen Vorschlag von LEFFSON, LIPPMANN und BAETGE sehr oft ein Gruppenumfang von $n_d = 25$ Elementen zugrunde gelegt.² Die Annahme- und Rückweisezahlen bei Vereinbarung einer Gruppenentnahme werden wie im Falle der oben dargestellten "Einzelentnahme" mit Hilfe der Beziehungen (3.29) und (3.30) bestimmt, wobei für y jedoch nur ganzzahlige Vielfache von n_d ($y=n_d, 2n_d, 3n_d, \dots$) auftreten können. Die errechneten Werte von $c(y)$ werden wie im Falle der Einzelentnahme abgerundet, die Werte von $d(y)$ aufgerundet.

Eine tabellarische Entscheidungsfindung ist alternativ zu der hier dargestellten Methode auch anhand der Annahme- und Rückweisekennzahlen $a(x)$ und $r(x)$ für vorgegebene Fehlerzahlen x ($x=0,1,2,\dots$) möglich. Dazu müßten vor Beginn der Stichprobenentnahme die entsprechenden Kennzahlen tabelliert werden; die Entscheidung wird durch Vergleich des bei einer bestimmten Fehlerzahl x realisierten Stichprobenumfangs y

1 Eine Ausnahme bilden SCHULTE, E., a.a.O., S. 137 und VANCE, NETER, a.a.O., S. 112.

2 Vgl. LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 69 f. und S. 119 ff.; LEFFSON, U., a.a.O., S. 184; WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 131.

mit den tabellierten Werten ("Entscheidungsregel 3") getroffen.¹ Diese Alternative ist jedoch in der Literatur kaum bekannt, meines Wissens wird sie im Modell der Binomialverteilung nur von GUENTHER empfohlen.²

Die hier angesprochenen Konzepte zur Testdurchführung und -auswertung sind grundsätzlich auch im Modell der Hypergeometrischen Verteilung anwendbar. Die grafische Stichprobenauswertung ist auch hier die eleganteste Methode der Entscheidungsfindung. Bei Verwendung der Approximation 1 erhält man wie im Modell der Binomialverteilung parallele Bereichsgrenzen, bei Verwendung der Approximation 4 sind die Bereichsgrenzen nichtlinear. In diesem Fall können die Bereichsgrenzen als Treppenfunktion oder als Linienzug (Polygon) dargestellt werden.³

Zum Zwecke einer tabellarischen Stichprobenauswertung beim Folgetest im Modell der Hypergeometrischen Verteilung wird in der Literatur - im Gegensatz zu der im Binomialmodell vorherrschenden Meinung - die Tabellierung der Annahme- und Rückweisekennzahlen $a(x)$ bzw. $r(x)$ für vorgegebene Fehlerzahlen x ($x=0,1,\dots,M_0$) empfohlen.⁴ Dies ist, ausgehend von der Approximation nach CHUNG, auch rechentechnisch die einfachste Lösung. Wie im vorigen Punkt dieser Arbeit gezeigt wurde, ist jedoch grundsätzlich auch eine Berechnung und Tabellierung der Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ für vorgegebene Stichprobenumfänge y möglich. Auch in diesem Fall kann, wie im Binomialmodell, durch Vereinbarung einer Entnahme in Gruppen von jeweils n_d Elementen die Anzahl der zu tabellierenden Werte für $c(y)$ und $d(y)$ erheblich gesenkt werden.

1 Vgl. S. 100 ff. dieser Arbeit.

2 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 53 f.

3 Vgl. die Ausführungen auf Seite 113 dieser Arbeit und die dort zitierten Abbildungen.

4 Vgl. WAGNER, G., Folgetest ..., a.a.O., S. 98 ff.; CHUNG, J.H., a.a.O., S. 559 ff.; GHOSH, B.K., a.a.O., S. 113.

Mit einer Entnahme und Auswertung der Elemente in Gruppen ist jedoch eine "Verwässerung" der sequentiellen Entscheidungsregel verbunden; die Folge davon ist im allgemeinen eine Erhöhung des im Einzelfall oder durchschnittlich entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs.¹ Hier sind, wie aus der Abbildung 3.9 hervorgeht, zwei Möglichkeiten zu unterscheiden: der Zuwachs des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs beträgt höchstens $n_d - 1$ Elemente, wenn ein Zufallsweg bei Gruppenauswertung zu dem gleichen Ergebnis wie bei Einzelauswertung führt; der Zuwachs ist unbegrenzt, wenn ein Zufallsweg, der bei Einzelauswertung zur Annahme oder Rückweisung der Nullhypothese führen würde, wieder in den Weiterprüfungsbereich zurückkehrt.

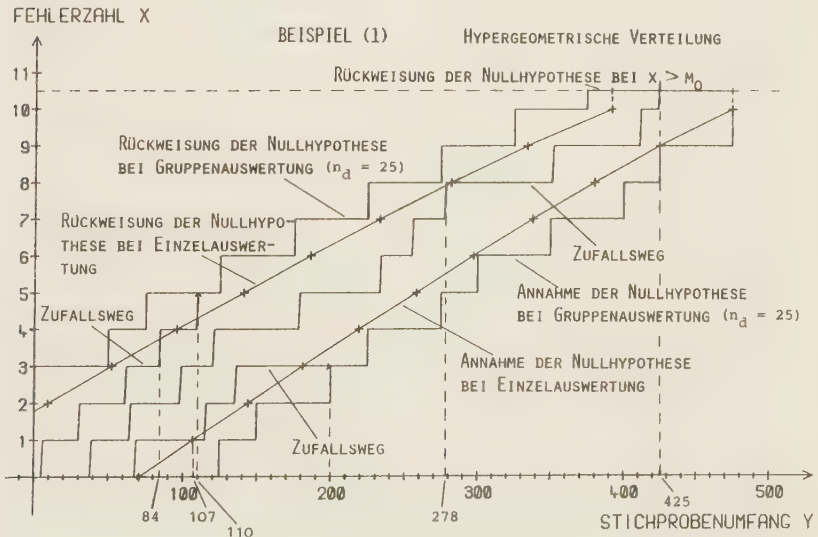


Abb. 3.9: Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei einem Folgetest mit Gruppenauswertung

¹ Vgl. zu den folgenden Ausführungen WALD, A., a.a.O., S. 101 ff.; SCHULTE, E., a.a.O., S. 142 f.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 117.

Eine Gruppenentnahme bewirkt also tendenziell eine Verbreiterung des Weiterprüfungsbereichs und dadurch bedingt eine Veränderung der Annahmekennlinie (OC-Funktion) und Erhöhung der Werte der ASN-Funktion.¹ Diese Verbreiterung des Weiterprüfungsbereiches kann ausgehend von der "Entscheidungsregel 3" auch dadurch veranschaulicht werden, daß die Annahmekennzahlen $a(x)$ auf das nächstgrößere ganzzahlige Vielfache der Gruppengröße n_d aufgerundet und die Rückweisekennzahlen auf das nächstkleinere ganzzahlige Vielfache der Gruppengröße abgerundet werden.²

Zur Verdeutlichung sind auf den folgenden Seiten die Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ und $d(y)$ sowie die Annahme- und Rückweisekennzahlen $a(x)$ und $r(x)$ zu Beispiel (1) im Modell der Binomialverteilung und der Hypergeometrischen Verteilung mit $N=1000$ grafisch und tabellarisch dargestellt. Angenommen wurde Einzelentnahme und Gruppenentnahme mit einem Gruppenumfang von 25 bzw. 40 Elementen. Ein Umfang von 25 wurde gewählt, weil dieser mit den Empfehlungen in der Literatur zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen übereinstimmt,³ ein Umfang von 40, weil dieser in etwa dem Kehrwert der Steigung s der Bereichsgrenzen im Binomialmodell entspricht. Die Einzelentnahme kann auch als Spezialfall der Gruppenentnahme mit einem Gruppenumfang von $n_d = 1$ interpretiert werden. Die angegebenen Werte stellen die "konservative Lösung"⁴ dar, sie sind mit Hilfe der in den Tabellen 3.2 bzw. 3.4 enthaltenen Koeffizienten bzw.

1 Der Verlauf der OC-Funktion wird nur dann nicht beeinflusst, wenn h_1 und h_2 ganzzahlig sind und $n_d=1/s$ gilt, d. h. wenn der Gruppenumfang mit dem Kehrwert der Steigung der Bereichsgrenzen im Binomialmodell übereinstimmt. Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 103; VANCE, NETER, a.a.O., S. 117; Statistical Research Group, Columbia University, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 2.30 f.

2 Vgl. CHUNG, J.H., a.a.O., S. 561.

3 Vgl. S. 129 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

4 Vgl. S. 86 ff. dieser Arbeit.

ausgehend von der Tabelle 3.6 und den Beziehungen (3.95) und (3.96) bestimmt worden. Im Modell der Hypergeometrischen Verteilung wurde die Approximation nach CHUNG verwendet.

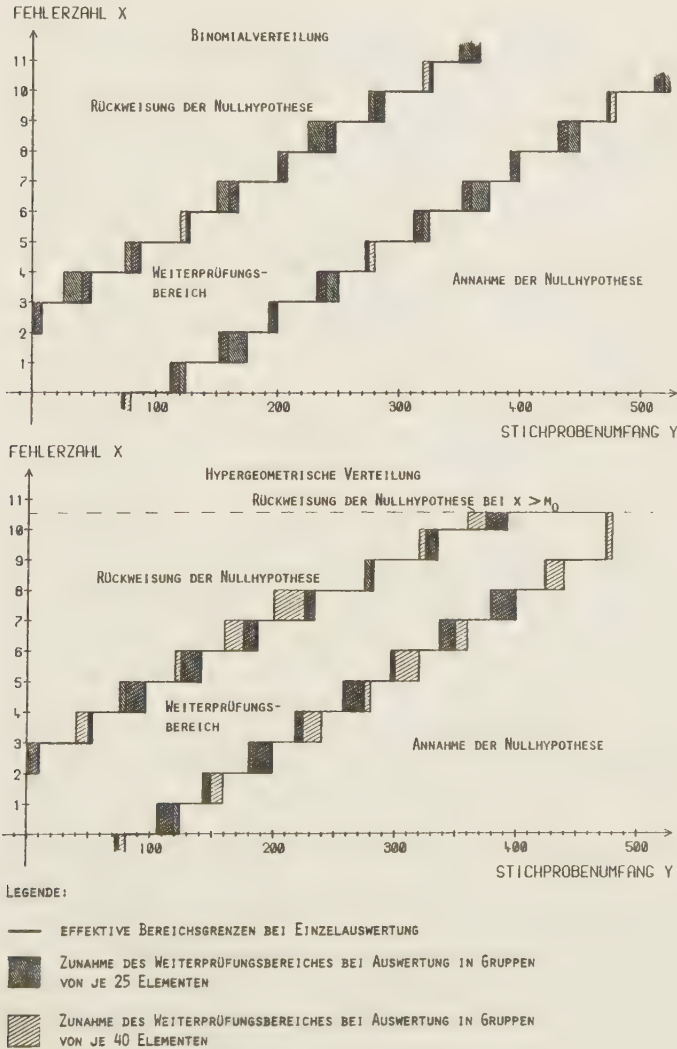


Abb. 3.10: Entscheidungsbereiche von Folgetests bei alternativen Gruppenumfängen im Modell der Binomial- bzw. der Hypergeometrischen Verteilung

Die Bereichsgrenzen sind in Form von Treppenfunktionen gezeichnet worden, um die aus der Vereinbarung einer Gruppenentnahme resultierenden Verschiebungen plastischer darstellen zu können.

Wie man aus der Tabelle 3.7 und der Abbildung 3.10 sieht, können bei begrenztem Tabellieraufwand die exakten Bereichsgrenzen des von WALD entwickelten Folgetestverfahrens im allgemeinen nur dadurch realisiert werden, daß die Annahme- und Rückweisekennzahlen $a(x)$ bzw. $r(x)$ für vorgegebene Fehlerzahlen x ($x=0,1,\dots$) tabelliert werden. Dieses Konzept garantiert auch im Falle einer Gruppenauswertung mit beliebigem Gruppenumfang n_d den kleinstmöglichen Tabellierumfang; die entsprechenden Kennzahlen können, wie hier gezeigt worden ist, durch geeignete Auf- oder Abrundung leicht bestimmt werden.

Eine Tabellierung der Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$, wie sie bislang in der Literatur noch üblich ist, bedingt dagegen entweder einen wesentlich größeren Tabellenumfang oder aber, abhängig vom gewählten Gruppenumfang, eine mehr oder weniger starke Veränderung der von WALD angegebenen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens. Diese Veränderung ist bei der hier angegebenen Form der Rundung konservativ, d. h. die Wahrscheinlichkeiten eines α - bzw. β -Fehlers werden bei einer Entnahme in Gruppen vermutlich kleiner oder gleich, aber nicht größer als die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten bei Einzelentnahme sein.¹

Die Vereinbarung einer Gruppenentnahme allein aus tabellier-technischen Gründen erscheint jedoch wegen der damit verbundenen Erhöhung des (durchschnittlich) entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs als nicht sinnvoll. Die Auswirkungen einer Gruppenentnahme sollen am Beispiel der Mindeststichprobenumfänge zur Annahme bzw. Rückweisung der Null-

¹ Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 100 ff.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 117.

Bei- spiel	Annahme- und Rückweisezahlen										Annahme- und Rückweisekennzahlen																			
	$n_d = 1$					$n_d = 25$					$n_d = 40$					$n_d = 1$					$n_d = 25$					$n_d = 40$				
	y	c(y)	d(y)	y	c(y)	d(y)	y	c(y)	d(y)	x	a(x)	r(x)	x	a(x)	r(x)	x	a(x)	r(x)	x	a(x)	r(x)	x	a(x)	r(x)	x	a(x)	r(x)			
Bino- mial- vertei- lung	1	-2	2	25	-2	3	40	-1	3	0	73	-73	0	75	-75	0	80	-80	0	80	-80	0	80	-80	0	80	-80			
	2	-2	2	50	-1	4	80	0	4	1	113	-33	1	125	-50	1	120	-40	1	120	-40	1	120	-40	1	120	-40			
	3	-2	2	75	0	4	120	1	5	2	153	7	2	175	0	2	160	0	2	160	0	2	160	0	2	160	0			
	4	-2	2	100	0	5	160	2	6	3	193	47	3	200	25	3	200	40	3	200	40	3	200	40	3	200	40			
	5	-2	2	125	1	5	200	3	7	4	233	87	4	250	75	4	240	80	4	240	80	4	240	80	4	240	80			
	6	-2	2	150	1	6	240	4	8	5	273	127	5	275	125	5	280	120	5	280	120	5	280	120	5	280	120			
	7	-2	2	175	2	7	280	5	9	6	313	167	6	325	150	6	320	160	6	320	160	6	320	160	6	320	160			
	8	-2	3	200	3	7	320	6	10	7	353	207	7	375	200	7	360	200	7	360	200	7	360	200	7	360	200			
	9	-2	3	225	3	8	360	7	11	8	393	247	8	400	225	8	400	240	8	400	240	8	400	240	8	400	240			
	10	-2	3	250	4	9	400	8	12	9	433	287	9	450	275	9	440	280	9	440	280	9	440	280	9	440	280			
	11	-2	3	275	5	9	440	9	13	10	473	327	10	475	325	10	480	320	10	480	320	10	480	320	10	480	320			
	12	-2	3	300	5	10	480	10	14	11	513	367	11	525	350	11	520	360	11	520	360	11	520	360	11	520	360			
Hyper- geom. Vertei- lung	1	-2	2	25	-2	3	40	-1	3	0	71	-76	0	75	-100	0	80	-80	0	80	-80	0	80	-80	0	80	-80			
	2	-2	2	50	-1	3	80	0	4	1	107	-34	1	125	-50	1	120	-40	1	120	-40	1	120	-40	1	120	-40			
	3	-2	2	75	0	4	120	1	5	2	144	9	2	150	0	2	160	0	2	160	0	2	160	0	2	160	0			
	4	-2	2	100	0	5	160	2	6	3	181	52	3	200	50	3	200	40	3	200	40	3	200	40	3	200	40			
	5	-2	2	125	1	5	200	3	7	4	219	96	4	225	75	4	240	80	4	240	80	4	240	80	4	240	80			
	6	-2	2	150	2	6	240	4	8	5	258	141	5	275	125	5	280	120	5	280	120	5	280	120	5	280	120			
	7	-2	2	175	2	6	280	5	8	6	297	186	6	300	175	6	320	160	6	320	160	6	320	160	6	320	160			
	8	-2	2	200	3	7	320	6	9	7	338	233	7	350	225	7	360	200	7	360	200	7	360	200	7	360	200			
	9	-2	2	225	4	7	360	7	10	8	380	282	8	400	275	8	400	280	8	400	280	8	400	280	8	400	280			
	10	-2	3	250	4	8	400	8	11	9	425	334	9	425	325	9	440	320	9	440	320	9	440	320	9	440	320			
	11	-2	3	275	5	8	440	9	11	10	475	392	10	475	375	10	480	360	10	480	360	10	480	360	10	480	360			
	12	-2	3	300	6	9	480	10	11	11	513	392	11	525	375	11	520	360	11	520	360	11	520	360	11	520	360			

Tab. 3.7: Annahme- und Rückweisezahlen sowie Annahme- und Rückweisekennzahlen von Folgetests bei Einzel- und Gruppenauswertung (Binomial- bzw. Hypergeometrische Verteilung)

hypothese verdeutlicht werden. Aus der Tabelle 3.7 erhält man zu den Beispielen (1) und (2) im Modell der Binomialverteilung bei konservativer Lösung die in der Tabelle 3.8 abgedruckten Mindeststichprobenumfänge beim Folgetest mit Gruppenauswertung.

Beispiel	Mindeststichprobenumfang zur			
	Annahme der H_0		Rückweisung der H_0	
	$n_d=25$	$n_d=40$	$n_d=25$	$n_d=40$
(1)	75	80	25 (3)	40 (3)
(2)	100	120	25 (3)	40 (3)

Tab. 3.8: Mindeststichprobenumfänge von Folgetests zu ausgewählten Beispielen bei Entnahme der Elemente in Gruppen (Binomialmodell)

Bei den Mindeststichprobenumfängen zur Rückweisung der Nullhypothese sind jeweils zwei Werte angegeben worden, von denen der erste für den Fall gilt, daß die einzelnen Gruppen komplett geprüft werden müssen und der zweite, eingeklammerte Wert für den Fall, daß die Auswertung abgebrochen wird, sobald die Rückweisegrenze erreicht ist.¹ Wenn kein Abbruch der Stichprobenentnahme zugelassen wird, sind in beiden hier dargestellten Beispielen die zur Rückweisung der Nullhypothese erforderlichen Stichprobenumfänge beim Folgetest mit Gruppenauswertung wesentlich höher als beim Folgetest mit Einzelauswertung,² aber kleiner als bei passenden Einfach- oder Doppeltests.³ Das gleiche gilt, wenn ein Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze zugelassen wird: in beiden Beispielen sind die Mindestumfänge beim Folgetest mit Gruppenentnahme größer als beim Folgetest mit Einzelentnahme, aber kleiner als bei abgebrochenen Einfach- oder Doppeltests.

1 Diese Vorgehensweise entspricht dem Prinzip der "abgebrochenen Kontrolle" ("curtailed sampling"), vgl. S. 48 ff. dieser Arbeit.

2 Vgl. Tabelle 3.3 auf Seite 99 dieser Arbeit.

3 Vgl. S. 45 f. und S. 72 ff. dieser Arbeit.

Beim Vergleich der zur Annahme der Nullhypothese mindestens erforderlichen Stichprobenumfänge wandelt sich das Bild: Bei einem Gruppenumfang von $n_d = 25$ ist ein Folgetest einem entsprechenden Doppeltest im Beispiel (1) leicht überlegen, im Beispiel (2) gleichwertig. Bei einem Gruppenumfang von $n_d = 40$ ist ein Folgetest einem entsprechenden Doppeltest im Beispiel (1) gleichwertig, im Beispiel (2) dagegen deutlich unterlegen.

Durch dieses Beispiel ist nachgewiesen worden, daß durch die in der Literatur oft empfohlene Tabellierung der Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ für Gruppen von Stichprobenelementen und die damit erzwungene gruppenweise Auswertung die bei Anwendung des Folgetestverfahrens möglichen Einsparungen gegenüber anderen Typen statistischer Tests teilweise oder ganz aufgehoben werden können. Deshalb sollen im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Entscheidungsbereiche von Folgetests immer nur in Form einer Tabelle der Kennzahlen $a(x)$ und $r(x)$ für alternative Fehlerzahlen x ($x=0,1,\dots$) tabellarisch dargestellt werden.

Als Beweis für die Leistungsfähigkeit dieses Tabellierungskonzepts in Verbindung mit der konservativen Definition der Bereichsgrenzen sollen hier Tabellen der Entscheidungsbereiche für alternative Wahrscheinlichkeiten eines α - bzw. β -Fehlers zu ausgewählten Beispielen im Modell der Binomial- und der Hypergeometrischen Verteilung entwickelt werden. Dabei sollen in Übereinstimmung mit den bisher dargestellten Beispielen $\theta_0=0,01$ und $\theta_A=0,05$ sowie im Modell der Hypergeometrischen Verteilung $N=1000$ gewählt werden. Für die zulässigen Fehlerwahrscheinlichkeiten sollen die Werte 0,01; 0,02; 0,05 und 0,10 berücksichtigt werden.¹

¹ Diese Abstufung entspricht weitgehend der von WYSOCKI vorgeschlagenen Abstufung der Fehlerwahrscheinlichkeiten; vgl. WYSOCKI, Kł. v., Zur Verwendung von Nomogrammen ..., a.a.O., S. 494 (bzw. S. 106).

Die Bereichsgrenzen im Modell der Binomialverteilung sind teilweise aus den Tabellen 3.6 und 3.7 übernommen, teilweise anhand der Beziehungen (3.42) bis (3.49) neu errechnet worden. Die Steigung beträgt, wie in den bisher dargestellten Beispielen, $s_k = 40,0233$. Die Abszissenabschnitte für alternative zulässige Fehlerwahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle 3.9 angegeben. Aus der Spalte, die der zulässigen Wahrscheinlichkeit eines α -Fehlers entspricht, kann der Wert für f_2 abgelesen werden; aus der Spalte, die der zulässigen Wahrscheinlichkeit eines β -Fehlers entspricht, ergibt sich der Wert für f_1 .

Koeffizient	Fehlerwahrscheinlichkeit α bzw. β			
	0,01	0,02	0,05	0,10
f_2 bzw. f_1	111,6595	94,8531	72,6362	55,8298

Tab. 3.9: Koeffizienten der Annahme- und Rückweisekenngeraden zu ausgewählten Beispielen bei konservativer Lösung

Ablesebeispiel: Für $\alpha = \beta = 0,05$ erhält man $f_2 = f_1 = 72,6362$, für $\alpha = 0,10$ und $\beta = 0,02$ erhält man $f_2 = 55,8298$ und $f_1 = 94,8531$ als Koeffizienten der Bereichsgrenzen.

Wenn die errechneten Werte wie auf Seite 122 dieser Arbeit angegeben gerundet werden, erhält man die in der Tabelle 3.10 abgedruckten Kennzahlen.

Die entsprechenden Kennzahlen im Modell der Hypergeometrischen Verteilung können entweder ebenfalls aus den Tabellen 3.6 und 3.7 entnommen oder, ausgehend von der Approximation nach CHUNG, mit Hilfe der Beziehungen (3.91) und (3.92) direkt berechnet werden. Auch in diesem Fall werden die errechneten Werte, wie auf Seite 122 dargestellt, gerundet; die errechneten Kennzahlen sind in der Tabelle 3.11 abgedruckt.

Fehler- zahl x	zulässige Wahrscheinlichkeit eines Fehlers							
	erster Art (α)				zweiter Art (β)			
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,01	0,02	0,05	0,10
0	-112	-95	-73	-56	112	95	73	56
1	-72	-55	-33	-16	152	135	113	96
2	-32	-15	7	24	192	175	153	136
3	8	25	47	64	232	215	193	176
4	48	65	87	104	272	255	233	216
5	88	105	127	144	312	295	273	256
6	128	145	167	184	352	335	313	296
7	168	185	207	224	392	376	353	336
8	208	225	247	264	432	416	393	377
9	248	265	287	304	472	456	433	417
10	288	305	327	344	512	496	473	457

Tab. 3.10: Auszug aus einer Tabelle der Annahme- und Rückweiskennzahlen von Folgetests im Modell der Binomialverteilung ($\theta_0=0,01$; $\theta_A=0,05$)

Fehler- zahl x	zulässige Wahrscheinlichkeit eines Fehlers							
	erster Art (α)				zweiter Art (β)			
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,01	0,02	0,05	0,10
0	-119	-100	-76	-58	106	91	71	55
1	-75	-57	-34	-16	141	127	107	92
2	-31	-13	9	25	177	163	144	129
3	14	31	52	68	213	199	181	167
4	60	76	96	111	249	236	219	206
5	106	121	141	155	286	274	258	245
6	154	168	186	200	324	312	297	285
7	203	216	233	246	363	352	338	326
8	253	266	282	294	403	393	380	369
9	308	319	334	345	447	437	425	415
10	368	379	392	402	495	486	475	466

Tab. 3.11: Tabelle der Annahme- und Rückweiskennzahlen von Folgetests im Modell der Hypergeometrischen Verteilung ($N=1000$; $\theta_0=0,01$; $\theta_A=0,05$)

Für eine vorgegebene Kombination von α und β können die hier abgedruckten Kennzahlen in beliebiger Weise zu einem Folgetest zusammengestellt werden. Da hier jeweils vier Werte für α und vier Werte für β berücksichtigt wurden, sind also insgesamt $4^2 = 16$ verschiedene Kombinationen von α und β möglich. Beispiel: Für $\alpha = \beta = 0,02$ erhält man die Annahmekennzahlen $a(x)$ aus Spalte (6) und die Rückweisekennzahlen $r(x)$ aus Spalte (2); für $\alpha = 0,10$ und $\beta = 0,01$ erhält man die entsprechenden Kennzahlen aus den Spalten (5) und (4) usw.

In der Abbildung 3.11 sind die entsprechenden Bereichsgrenzen im Modell der Binomial- und der Hypergeometrischen Verteilung auch grafisch dargestellt. In gleicher Weise wie für die tabellierten Werte beschrieben, können auch hier die eingezeichneten Bereichsgrenzen in beliebiger Weise zu einer grafischen Stichprobenvorschrift kombiniert werden.

Eine solche Kombination ist jedoch nur dann möglich, wenn die Bereichsgrenzen ausgehend von der konservativen Definition der kritischen Werte A und B bestimmt werden. Bei Verwendung der in der Literatur vorherrschenden approximativen Definition¹ wären anstelle der Tabellen 3.10 oder 3.11 jeweils 16 Tabellen mit zwei Spalten oder vier Tabellen mit je acht Spalten erforderlich gewesen, um die gleiche Anzahl möglicher Kombinationen zu realisieren. Umgekehrt könnte die Anzahl der bei LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE abgedruckten Tabellen ohne Informationsverlust von 27 auf 9 gesenkt werden, wenn man von der dort verwendeten approximativen Lösung zur konservativen Lösung übergehen würde.²

1 Vgl. zu diesen Ausführungen Seite 84 ff. dieser Arbeit.

2 In den oben zitierten Tabellen werden für α und β jeweils drei Werte, nämlich $\alpha = 0,04; 0,05; 0,06$ und $\beta = 0,02; 0,03$ und $0,04$ unterstellt; vgl. LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 120 ff.

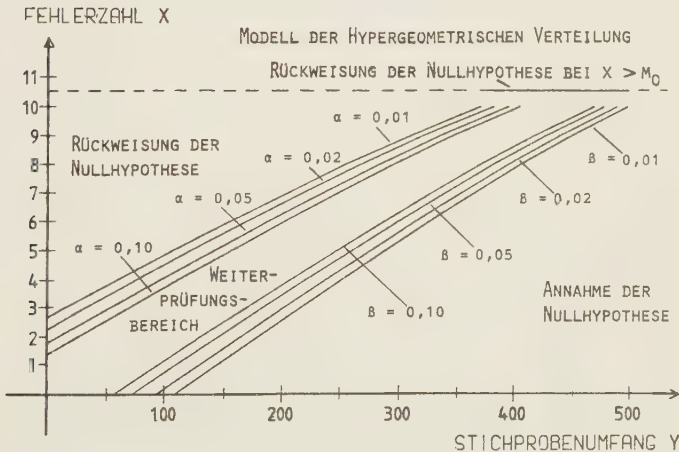
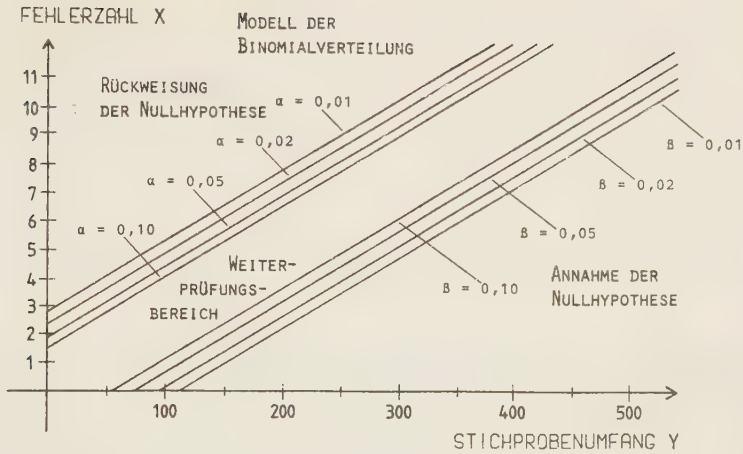


Abb. 3.11: Annahme- und Rückweisebereiche von Folgetests im Modell der Binomial- und der Hypergeometrischen Verteilung ($\theta_0=0,01$; $\theta_A=0,05$; $N=1000$)

Die oben stehenden Ausführungen bestätigen die schon in Abschnitt 3.2 festgestellte Überlegenheit der "konservativen" Definition der kritischen Werte A und B gegenüber der bislang in der Literatur noch vorherrschenden approximativen Definition. Die konservative Lösung ist sowohl in theoretischer Hinsicht - da sie eine Einhaltung der zuläs-

sigen Fehlerwahrscheinlichkeiten garantiert - als auch in technischer Hinsicht - da sie einen wesentlich geringeren Rechen- und Tabellieraufwand erfordert - der approximativen Lösung vorzuziehen. Probleme ergeben sich allenfalls daraus, daß die meisten der in Abschnitt 3.5 dieser Arbeit darzustellenden Beziehungen nur für den Fall einer approximativen Definition der Bereichsgrenzen hergeleitet worden sind. Mögliche Lösungen sind in Abschnitt 3.5 sowie im vierten Kapitel dieser Arbeit zu diskutieren.

Zuvor soll jedoch ein bisher nicht erwähntes praktisches Problem dargestellt werden: Im Binomialmodell ist, im Gegensatz zum Modell der Hypergeometrischen Verteilung, der Weiterprüfungsbereich des Folgetestverfahrens nach WALD offen, d. h. der Stichprobenumfang y kann beliebig groß werden. "Um einen zu großen Stichprobenumfang zu vermeiden, der theoretisch, wenn auch mit geringer Wahrscheinlichkeit, erforderlich sein kann, ist es daher zweckmäßig, den Test ... abzubrechen".¹

Eine Abbruchregel soll hier in Anlehnung an die in der Literatur übliche Vorgehensweise durch den größtmöglichen Stichprobenumfang n_0 ("Abbruchgrenze") sowie durch die im Falle eines Abbruchs gültige Annahmezahl $c^*(n_0)$ ("Abbruchkriterium") definiert werden.² Die Nullhypothese ist anzunehmen, wenn bei einem Stichprobenumfang von n_0 Elementen die Fehlerzahl kleiner oder gleich $c^*(n_0)$ ist; die Nullhypothese wird zurückgewiesen, wenn die Fehlerzahl größer als $c^*(n_0)$ ist. Als Abbruchkriterium wird im allgemeinen das arithmetische Mittel der Annahme- und Rückweiszahlen an der Stelle n_0

¹ SCHULTE, E., a.a.O., S. 143.

² Vgl. zu den folgenden Ausführungen SCHULTE, E., a.a.O., S. 143 f.; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 65 f.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 116; WALD, A., a.a.O., S. 104 f.; KRETSCHMER, Franz-Josef, Sequentielle Untersuchungspläne zur Innerbetrieblichen Überwachung des Qualitätsniveaus von Fleischererzeugnissen, Diss. FU Berlin 1973, S. 39 f.

$$c^*(n_0) = \frac{1}{2} \cdot (c(n_0) + d(n_0)) \quad (3.97)$$

verwendet. Ein anderer Vorschlag lautet, das Abbruchkriterium als

$$c^*(n_0) = s \cdot n_0 \quad (3.98)$$

zu wählen, wobei s die Steigung der Bereichsgrenzen angibt.¹

Hiermit gleichbedeutend ist die Empfehlung, die Nullhypothese bei einem Stichprobenumfang von n_0 anzunehmen, wenn der Wert der Prüfgröße $L(x; n_0)$ kleiner gleich eins bzw. der Wert der logarithmierten Prüfgröße $l(x; n_0)$ kleiner gleich null ist.²

Die hier genannten Kriterien (3.97) und (3.98) sind in dem Spezialfall, daß $\alpha = \beta$ gilt und somit die Achsenabschnitte der Bereichsgrenzen gleich sind,³ völlig identisch. Bei ungleichen Werten von α und β können diese Kriterien rundungsbedingt zum gleichen Ergebnis oder sonst zu geringfügig abweichenden Ergebnissen führen. Ein Beispiel einer solchen Abbruchregel ist in der Abbildung 3.12 dargestellt.

Die hier definierte Abbruchregel ist jedoch, wie man leicht sieht, nicht als optimal zu bezeichnen, da sie nicht bei dem kleinstmöglichen Stichprobenumfang zu einer Entscheidung führt. Sinnvoller wäre vielmehr, gemäß dem Prinzip der "abgebrochenen Kontrolle" ("curtailed sampling")⁴ die Nullhypothese zurückzuweisen und die Entnahme abzubrechen, sobald die Zahl der Fehler in der Stichprobe den Wert des

1 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 54.

2 Vgl. ebenda; WALD, A., a.a.O., S. 61 ff.; WILKS, S.S., a.a.O., S. 492 ff.; SARKADI, VINCZE, a.a.O., S. 350 f.

3 Vgl. die Ausführungen auf Seite 97 f. dieser Arbeit.

4 Vgl. Abschnitt 2.5 dieser Arbeit.

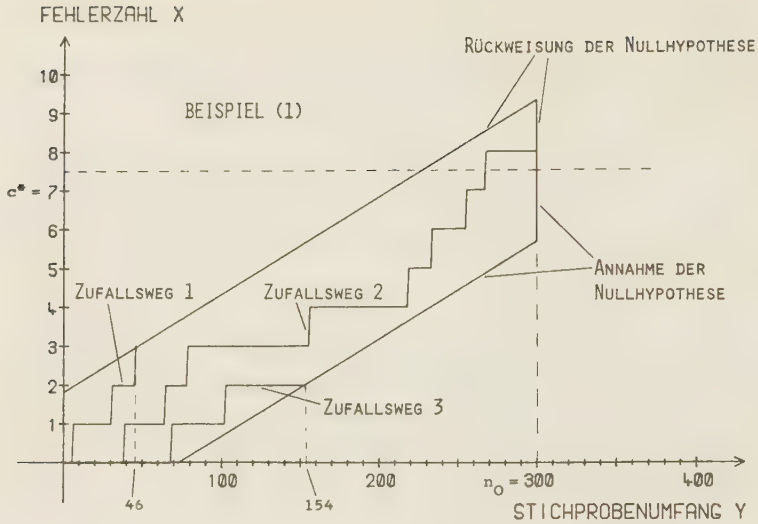


Abb. 3.12: Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei "konventioneller" Abbruchregel eines Folgetests

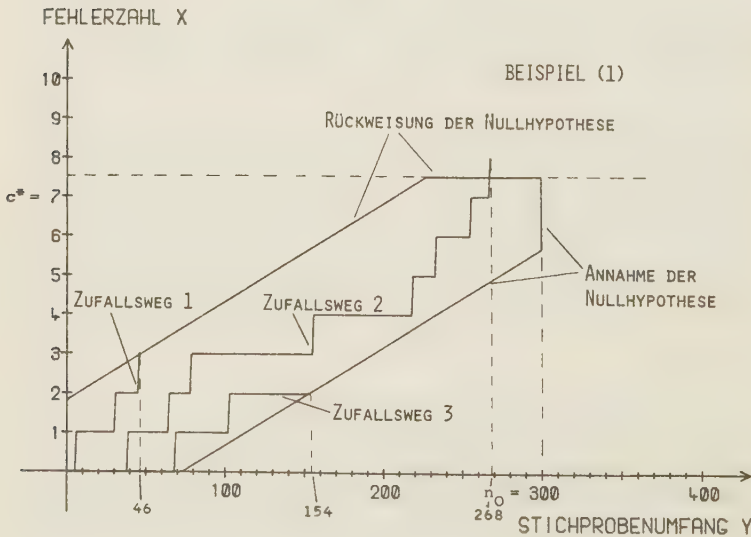


Abb. 3.13: Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei "optimierter" Abbruchregel eines Folgetests

Abbruchkriteriums übersteigt. Die Annahmewahrscheinlichkeit der H_0 , also der Verlauf der OC-Funktion, wird nicht beeinflusst, wenn anstelle der in der Literatur definierten "unwirtschaftlichen" Abbruchregel die "optimierte" Abbruchregel verwendet wird. Die Stichprobenvorschrift dieser Abbruchregel ist in der Abbildung 3.13 grafisch dargestellt.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll als Abbruchregel, soweit nicht ausdrücklich anders angegeben, immer die oben definierte "optimierte" Abbruchregel verwendet werden. Welche durchschnittlichen Einsparungen durch die Anwendung dieser Regel möglich sind, läßt sich allerdings erst mit dem in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit darzustellenden Verfahren errechnen. Wie an der angegebenen Stelle zu zeigen sein wird, hängen diese Einsparungen unter anderem vom Wert der Abbruchgrenze n_0 ab.

Jede Abbruchregel beim Folgetestverfahren bewirkt tendenziell eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeiten eines α - bzw. β -Fehlers, die nur dann vernachlässigbar klein ist, wenn die Abbruchgrenze n_0 genügend groß gewählt wird.¹ Die in der Literatur genannten Vorschläge zur Vorgabe der Abbruchgrenze n_0 unterscheiden sich stark: WALD und andere empfehlen, das Dreifache des erwarteten Stichprobenumfangs als Wert für n_0 zu verwenden.² Dagegen wählt SCHULTE für die Abbruchgrenze n_0 den maximalen Wert der ASN-Funktion, der, wie noch gezeigt werden soll, bei einem Anteilswert $\theta \approx s$ liegt.³ Andere Autoren halten einen Abbruch beim Stichprobenumfang n eines entsprechenden Einfachtests für zulässig.⁴

1 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 61 ff. und S. 104 f.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 116; SCHULTE, E., a.a.O., S. 144; KRETSCHMER, F.-J., a.a.O., S. 39.

2 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 105; VANCE, NETER, a.a.O., S. 116.

3 Vgl. SCHULTE, E., a.a.O., S. 144.

4 Vgl. z. B. LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 65.

Eine abschließende Beurteilung der hier angegebenen verschiedenen Konzepte zur Festlegung der Abbruchgrenze n_0 und des Kriteriums $c^*(n_0)$ soll, wie oben begründet wurde, erst in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit erfolgen. Abschätzungen der Auswirkungen alternativer Abbruchregeln sind jedoch bereits mit der zum Folgetestverfahren nach WALD entwickelten Theorie, die im folgenden Abschnitt 3.5 darzustellen sein wird, möglich.

3.5 Theorie zum Folgetestverfahren nach WALD

3.5.1 Vorbemerkung

Aufgabe dieses Abschnitts kann nicht die vollständige Wiedergabe der zum Folgetestverfahren (Sequentialtestverfahren) nach WALD entwickelten Theorie sein, weil dies den Rahmen der vorliegenden Arbeit bei weitem sprengen würde. Hier sollen nur die wichtigsten Aspekte der von WALD und seinen Nachfolgern entwickelten Theorie angesprochen werden. Dazu gehört als erstes die Darstellung der von WALD und der Statistical Research Group (SRG) entwickelten Näherungsformeln für die OC-Funktion und die Diskussion ihrer wichtigsten Eigenschaften sowohl für den Fall einer approximativen wie einer konservativen Definition der Bereichsgrenzen.¹ Anschließend sind die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung der ASN-Funktion eines Folgetests zu behandeln, die, wie zu zeigen sein wird, auf den Lösungen für die OC-Funktion aufbauen. Die wichtigsten Eigenschaften der ASN-Funktion des Folgetestverfahrens sollen kurz aufgezeigt werden.

Weiterführende Entwicklungen, mit denen Ober- und Untergrenzen für die OC- und ASN-Funktion bzw. unter zusätzlichen Annahmen abgeleitete bessere Näherungslösungen ermittelt werden können, können im Rahmen dieser Arbeit nur am Rande erwähnt werden. Ebenso kann die Abschätzung der

¹ Vgl. Abschnitt 3.2 dieser Arbeit.

Auswirkungen von Abbruchregeln auf die OC-Funktion nur kurz gestreift werden. Der Grund für die hier angesprochene Einschränkung ist, daß bei Weiterentwicklungen der Theorie zum Folgetestverfahren der Aufwand im Verhältnis zum möglichen Erfolg im allgemeinen sehr hoch ist, so daß angesichts der im vierten Kapitel dieser Arbeit darzustellenden Verfahren zur Bestimmung von Werten der OC- und ASN-Funktion solche Weiterentwicklungen als für praktische Bedürfnisse kaum geeignet erscheinen.

Alle Ausführungen dieses Abschnitts 3.5 beziehen sich ausschließlich auf das Binomialmodell, da in der Literatur zum Folgetestverfahren meines Wissens noch keine allgemeinen Aussagen zum Modell der Hypergeometrischen Verteilung abgeleitet worden sind. Ein Lösungsweg, der auch im Modell der Hypergeometrischen Verteilung anwendbar ist, wird erst in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit darzustellen sein.

3.5.2 OC-Funktion des Folgetestverfahrens nach WALD

In der Literatur zum Folgetestverfahren existieren zwei auf den ersten Blick sehr verschiedene Ansätze zur Bestimmung der OC-Funktion (Operationscharakteristik) eines Folgetests, die jedoch, wie hier gezeigt werden soll, sachlich gleichbedeutend sind. Gemeinsames Kennzeichen dieser Ansätze ist, daß im Modell der Binomialverteilung keine direkte Berechnung des Wertes der OC-Funktion für einen vorgegebenen Anteilswert θ , sondern nur eine indirekte Berechnung über noch zu definierende Hilfsfunktionen möglich ist. Ein weiteres gemeinsames Merkmal ist, daß es sich hierbei nur um Näherungslösungen (Approximationsformeln) handelt, was im folgenden durch das Symbol $\tilde{OC}(\theta)$ kenntlich gemacht werden soll.

Zunächst sollen hier die Ergebnisse der von WALD entwickelten Lösung zur Bestimmung der OC-Funktion im Modell der Binomialverteilung angegeben werden.¹ Auf eine Wiedergabe der Herleitung soll hier verzichtet werden, da diese Herleitung auch in einer Reihe von Quellen der Sekundärliteratur ganz oder teilweise abgedruckt ist.² WALD findet

$$\tilde{OC}(\theta) = \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}} \quad (h(\theta) \neq 0) \quad (3.99)$$

wobei der Wert der Hilfsfunktion $h(\theta)$ als Lösung der Gleichung

$$(1-\theta) \left(\frac{1-\theta_A}{1-\theta_0} \right)^{h(\theta)} + \theta \left(\frac{\theta_A}{\theta_0} \right)^{h(\theta)} = 1 \quad (3.100)$$

definiert ist; A und B bezeichnen die kritischen Werte der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens.³

Die Beziehung (3.100) kann zwar nicht nach $h(\theta)$, wohl aber nach θ aufgelöst werden.⁴ Zunächst sollen hier jedoch in Anlehnung an die in Punkt 3.3.2 dieser Arbeit durch (3.26) und (3.27) definierten Konstanten g_1 und g_2 die Hilfsgrößen

$$G_1 = \frac{\theta_A}{\theta_0} = e^{g_1} \quad (3.101)$$

und

$$G_2 = \frac{1-\theta_0}{1-\theta_A} = e^{g_2} \quad (3.102)$$

eingeführt werden; dabei bezeichnet e die Basis des natürlichen Logarithmus ($e=2,71828\dots$).

1 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 48 ff.

2 Vgl. KARUS, H., a.a.O., S. 139 ff.; FISZ, M., a.a.O., S. 686 ff. und S. 695 ff.; SARKADI, VINCZE, a.a.O., S. 334 ff. und S. 340 f.; WILKS, S.S., a.a.O., S. 487 ff. und S. 495; LEHMANN, E.L., a.a.O., S. 102 f.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 17 ff.; UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 139 ff.

3 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 50 f.

4 Eine ausführliche Darstellung dieser Umformung gibt KARUS, H., a.a.O., S. 147 f.; vgl. auch WALD, A., a.a.O., S. 96; FISZ, M., a.a.O., S. 695; WILKS, S.S., a.a.O., S. 495.

Unter Verwendung dieser Hilfsgrößen erhält man, ausgehend von der Bedingung (3.100),

$$\theta = \frac{1 - G_2^{-h(\theta)}}{G_1^{h(\theta)} - G_2^{-h(\theta)}} \quad (h(\theta) \neq 0) \quad (3.103)$$

als Formel zur Berechnung des Anteilswertes θ für einen vorgegebenen Wert der Hilfsfunktion $h(\theta)$.

Die beiden Beziehungen (3.99) und (3.103) sind, wie man sieht, nicht definiert, wenn die Hilfsfunktion $h(\theta)$ den Wert null besitzt. Für diesen Fall findet WALD

$$\theta = s$$

und

$$\tilde{OC}(s) = \frac{\ln A}{\ln A - \ln B} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (h(s) = 0) \quad (3.104)$$

wobei h_1 und h_2 die Ordinatenabschnitte der Bereichsgrenzen im Binomialmodell bezeichnen.¹ Die Übereinstimmung der beiden in (3.104) angegebenen Terme kann ausgehend von (3.32) und (3.33) leicht bewiesen werden.

Bevor die Eigenschaften dieser Näherungslösung zur Bestimmung der OC-Funktion diskutiert werden, sind zunächst die Ergebnisse der Herleitung der Statistical Research Group, Columbia University (im folgenden als SRG abgekürzt), darzustellen. Im Gegensatz zu WALD, dessen Herleitung auf der allgemeinen Entscheidungsregel ("Entscheidungsregel 1") (3.5) des Folgetestverfahrens aufbaut, gründet die SRG ihre Herleitung auf die Entscheidungsregel 2 (3.34) und die durch die Beziehungen (3.29) bis (3.33) definierten Bereichsgrenzen im Binomialmodell.² Da diese Herleitung

¹ Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 95; vgl. auch FISZ, M., a.a.O., S. 687.

² Vgl. Statistical Research Group, Columbia University (SRG), Sequential Analysis ..., a.a.O., S. B.21 ff.

sehr umfangreich ist, sei auf eine Wiedergabe der einzelnen Schritte hier verzichtet, zumal eine ähnliche Herleitung auch bei WEBER abgedruckt ist.¹ Für die OC-Funktion findet man

$$OC(\theta) = \frac{g(\theta)^{h_1+h_2} - g(\theta)^{h_1}}{g(\theta)^{h_1+h_2} - 1} \quad (g(\theta) \neq 1) \quad (3.105)$$

wobei die Hilfsfunktion $g(\theta)$ als Lösung der Gleichung

$$\theta = \frac{g(\theta)^s - 1}{g(\theta) - 1} \quad (g(\theta) \neq 1) \quad (3.106)$$

definiert ist.² Um Verwechslungen mit der Fehlerzahl zu vermeiden, ist die Hilfsfunktion nicht, wie in der Literatur üblich, mit x , sondern mit dem Symbol $g(\theta)$ bezeichnet worden. s , h_1 und h_2 sind die für den entsprechenden Test im Binomialmodell berechneten Koeffizienten der Bereichsgrenzen.

¹ Vgl. WEBER, E., a.a.O., S. 429 ff.

Die Herleitung von WEBER enthält einen Fehler, der jedoch das Ergebnis dieser Herleitung nicht beeinflusst. WEBER gibt als Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zufallsweg einen bestimmten Punkt $P(x;y)$ erreicht

$$\binom{y}{x} \theta^x (1-\theta)^{y-x} \quad (0 \leq x \leq y),$$

wogegen die SRG anstelle des hier angegebenen Binomialkoeffizienten die Funktion $K(x;y)$ verwendet, die die Zahl der möglichen Zufallswege zum Punkt $P(x;y)$ angibt. WEBER übersieht, daß dieser Binomialkoeffizient auch die Zufallswege enthält, die den Weiterprüfungsbereich bereits verlassen hatten, während die Funktion $K(x;y)$ nur die Zufallswege erfaßt, die vollständig innerhalb des Weiterprüfungsbereiches verlaufen. Ausgehend von den auf Seite 98 dieser Arbeit angegebenen Mindeststichprobenumfängen zur Annahme bzw. Rückweisung der H_0 findet man

$$\binom{y}{x} \begin{cases} = K(x;y) & \text{für } x < h_2/(1-s) \text{ und } y < h_1/s \\ > K(x;y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

² Vgl. SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. B.25 f.; WEBER, E., a.a.O., S. 431; KARUS, H., a.a.O., S. 153 f.

Auch die beiden hier angegebenen Beziehungen (3.105) und (3.106) sind an einer bestimmten Stelle nicht definiert, in diesem Fall für einen Wert der Hilfsfunktion $g(\theta) = 1$. Für diesen Fall findet man

$$\theta = s$$

und

$$\tilde{OC}(s) = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (g(s) = 1) \quad (3.107)$$

für den Wert der OC-Funktion.¹ Diese Lösung ist also mit der von WALD gegebenen Lösung an der Stelle $\theta = s$ (3.104) völlig identisch.

Die Übereinstimmung der hier dargestellten unterschiedlichen Lösungen für beliebige Anteilswerte θ ist, unter der Annahme, daß die approximativen Definitionen (3.10) und (3.11) für die kritischen Werte A und B verwendet werden, von KARUS bewiesen worden.² Die Gültigkeit dieses Beweises kann jedoch, wie im folgenden zu zeigen sein wird, auf beliebige Definitionen der kritischen Werte A und B, also auch auf die konservativen Definitionen (3.17) und (3.18) ausgedehnt werden. Die hier gegebene Herleitung folgt in wesentlichen Punkten dem von KARUS vorgeschlagenen Beweisgang.

Die von WALD gefundene Beziehung (3.99) kann, da allgemein $a^b = e^{b \cdot \ln a}$ mit $e = 2,71828...$ gilt, auch als

$$\tilde{OC}(\theta) \approx \frac{e^{h(\theta) \cdot \ln A} - 1}{e^{h(\theta) \cdot \ln A} - e^{h(\theta) \cdot \ln B}}$$

bzw. nach einer Erweiterung des Bruches mit $e^{-h(\theta) \cdot \ln B}$ als

1 Vgl. WEBER, E., a.a.O., S. 436 f.; SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. B.26.

2 Vgl. KARUS, H., a.a.O., S. 150 ff.

$$OC(\theta) = \frac{e^{h(\theta)(\ln A - \ln B)} - e^{-h(\theta) \cdot \ln B}}{e^{h(\theta)(\ln A - \ln B)} - 1} \quad (3.108)$$

geschrieben werden. Wenn die Definitionsgleichungen (3.32) und (3.33) der Ordinatenabschnitte h_1 und h_2 im Binomialmodell nach $\ln A$ bzw. $\ln B$ aufgelöst werden, erhält man

$$\ln A = h_2(g_1 + g_2) \quad (3.109)$$

und

$$\ln B = -h_1(g_1 + g_2) \quad (3.110)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (3.109) und (3.110) in (3.108) und Vertauschen der Reihenfolge der Faktoren in den Exponenten erhält man

$$OC(\theta) = \frac{e^{(g_1 + g_2) \cdot h(\theta)(h_1 + h_2)} - e^{(g_1 + g_2) \cdot h(\theta) \cdot h_1}}{e^{(g_1 + g_2) \cdot h(\theta)(h_1 + h_2)} - 1}$$

und unter Berücksichtigung der in (3.101) und (3.102) definierten Hilfsgrößen G_1 und G_2 , da allgemein $e^{(a+b)} = e^a \cdot e^b$ gilt,

$$OC(\theta) = \frac{(G_1 \cdot G_2)^{h(\theta)(h_1 + h_2)} - (G_1 \cdot G_2)^{h(\theta) \cdot h_1}}{(G_1 \cdot G_2)^{h(\theta)(h_1 + h_2)} - 1} \quad (3.111)$$

Man erkennt, daß (3.111) mit der von der SRG hergeleiteten Näherung (3.105) übereinstimmt, wenn

$$g(\theta) = (G_1 \cdot G_2)^{h(\theta)} = e^{(g_1 + g_2) h(\theta)} \quad (3.112)$$

gesetzt wird. Diese Beziehung ist, wie man durch Einsetzen der Gleichungen (3.101) und (3.102) für G_1 und G_2 zeigen kann, mit dem von KARUS gefundenen Ergebnis identisch.¹

¹ Vgl. KARUS, H., a.a.O., S. 153.

Da die oben abgedruckte Herleitung von der Art der Definitionen der kritischen Werte A und B unabhängig ist, ist bewiesen, daß die Näherungslösungen (3.99) nach WALD und (3.105) nach der SRG in jedem Falle gleichbedeutend sind, gleichgültig, ob für A und B bzw. für h_1 und h_2 die "approximative" oder die "konservative" Lösung verwendet wird.¹ Zwischen den beiden Hilfsfunktionen $h(\theta)$ und $g(\theta)$ besteht eine feste Beziehung (3.112), die auch in der Form

$$\ln g(\theta) = h(\theta) \cdot \ln (G_1 \cdot G_2) = h(\theta) \cdot (g_1 + g_2)$$

bzw. durch Auflösen nach $h(\theta)$ als

$$h(\theta) = \frac{\ln g(\theta)}{g_1 + g_2} \quad (3.113)$$

geschrieben werden kann.

Mit Hilfe der hier gefundenen Ergebnisse kann auch die Übereinstimmung der Gleichungen (3.103) und (3.106) zur Bestimmung von θ leicht bewiesen werden. Wenn (3.103) mit $G_2^{h(\theta)}$ erweitert wird, findet man

$$\theta = \frac{G_2^{h(\theta)} - 1}{(G_1 \cdot G_2)^{h(\theta)} - 1} \quad (3.114)$$

oder nach geeigneten Umformungen

$$\theta = e^{\frac{\frac{g_2}{g_1 + g_2} (g_1 + g_2) h(\theta)}{(g_1 + g_2) h(\theta) - 1}} \cdot e^{-1}.$$

Unter Berücksichtigung der Definition (3.31) der Steigung s und der Beziehung (3.112) wird daraus

$$\theta = \frac{g(\theta)^s - 1}{g(\theta) - 1}. \quad (q.e.d.).$$

¹ Vgl. S. 83 ff. und S. 96 f. dieser Arbeit.

Die beiden hier dargestellten Näherungslösungen zur Berechnung der OC-Funktion sind also, wie hier gezeigt worden ist, inhaltlich völlig gleichbedeutend; auch der Rechenaufwand ist bei beiden Lösungen etwa gleich hoch.

Zur Vereinfachung der Berechnung von Punkten der OC-Funktion sind von einigen Autoren Rechenschemata entwickelt worden.¹ Diese Schemata stützen sich im allgemeinen auf eine spezielle "Symmetrieeigenschaft" der oben angegebenen Lösungen, die im folgenden kurz dargestellt werden soll: Für vorgegebene Werte der Hilfsfunktionen lassen sich Wertepaare θ_1, θ_2 als Lösungen der Gleichungen

$$h = h(\theta_1) = -h(\theta_2) \quad (3.115)$$

bzw.

$$g = g(\theta_1) = \frac{1}{g(\theta_2)} \quad (3.116)$$

bestimmen. Man kann nun zeigen, daß für alle so definierten Wertepaare

$$\check{O}\check{C}(\theta_2) = B^h \cdot \check{O}\check{C}(\theta_1) \quad (3.117)$$

$$= g^{-h_1} \cdot \check{O}\check{C}(\theta_1) \quad (3.118)$$

und

$$\theta_2 = G_1^h \cdot \theta_1 \quad (3.119)$$

$$= g^{1-s} \cdot \theta_1 \quad (3.120)$$

gilt.² Mit Hilfe dieser Beziehungen, deren Beweise hier nicht wiedergegeben werden sollen, kann die Berechnung von

¹ Vgl. WEBER, E., a.a.O., S. 431 ff.; KARUS, H., a.a.O., S. 157 ff.; SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 2.49 ff.

² Zu (3.117) und (3.119) vgl. WALD, A., a.a.O., S. 97 f.; KARUS, H., a.a.O., S. 158 und S. 242 f.; COWDEN, D.J., a.a.O., S. 557; zu (3.118) und (3.120) vgl. SRG, a.a.O., S. B.25 ff.; WEBER, E., a.a.O., S. 431.

Punkten der OC-Funktion vereinfacht werden. Dies ist vor allem dann interessant, wenn die Berechnungen von Hand durchgeführt werden; bei Verwendung eines Computers oder programmierbaren Rechners werden die möglichen Einsparungen durch den erhöhten Programmier- und Tabellieraufwand teilweise wieder aufgehoben.

Im allgemeinen wird man "die Zahlenwerte der Operationscharakteristik am zweckmäßigsten graphisch darstellen und die Auswertung, insbesondere Vergleiche, anhand einer solchen Darstellung vornehmen, da hierbei der Überblick leichter, schneller und auch einprägsamer möglich ist."¹ Zur Skizzierung des Verlaufes der OC-Funktion dürften fünf Punkte genügen, die den Werten $+\infty$, $+1$, 0 , -1 und $-\infty$ der Hilfsfunktion $h(\theta)$ entsprechen.² Abhängig davon, ob für A und B die approximativen oder die konservativen Bestimmungsgleichungen gewählt werden, erhält man für $\tilde{OC}(\theta)$ teilweise unterschiedliche Werte.³ Die Ergebnisse für die approximative und für die konservative Lösung sind in der folgenden Tabelle 3.12 nebeneinander dargestellt.

$h(\theta)$	θ	OC(θ) bei approximativer Lösung	OC(θ) bei konservativer Lösung
$+\infty$	0	1,0	1,0
+1	θ_0	$1 - \alpha$	$1 - \tilde{\alpha}$
0	s	$h_2 / (h_1 + h_2)$	$h_2 / (h_1 + h_2)$
-1	θ_A	β	$\tilde{\beta}$
$-\infty$	1	0	0

Tab. 3.12: Fünf Punkte der OC-Funktion eines Folgetests

1 KARUS, H., a.a.O., S. 161.

2 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 96 f.; KARUS, H., a.a.O., S. 155 f.; COWDEN, D.J., a.a.O., S. 558.

3 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 53.

Die in der Tabelle 3.12 aufgeführten Werte $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ sind durch

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\cdot\beta} \quad (3.121)$$

und

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\cdot\beta} \quad (3.122)$$

bestimmt.¹ Zwischen den Werten α und β auf der einen und $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ auf der anderen Seite bestehen außerdem die Beziehungen

$$\frac{1-\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} = A \quad (3.123)$$

und

$$\frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\alpha}} = \beta = B, \quad (3.124)$$

die von GUENTHER als "Bindeglied" zwischen der approximativen und der konservativen Bestimmung der kritischen Werte A und B gefunden worden sind.²

Ein vollständiger Beweis der in der Tabelle 3.12 angeführten Ergebnisse wäre zu umfangreich, zur Veranschaulichung seien hier lediglich die Herleitungen für die Fälle $h(\theta) = \pm 1$ dargestellt. Ausgehend von (3.99) findet man im Falle $h(\theta_0) = 1$

$$\tilde{OC}(\theta_0) = \frac{A-1}{A-B} \quad (3.125)$$

und, wenn für A und B die konservativen Bestimmungsgleichungen (3.17) und (3.18) eingesetzt werden,

$$\tilde{OC}(\theta_0) = \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha}-1}{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\beta} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\cdot\beta}$$

und damit

$$\tilde{\alpha} = 1 - \tilde{OC}(\theta_0) = \frac{1-\alpha\cdot\beta-1+\alpha}{1-\alpha\cdot\beta} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\cdot\beta} \quad (\text{q.e.d.}) .$$

¹ Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 49.

² Vgl. ebenda, S. 48 f.

Den entsprechenden Beweis, daß bei Verwendung der approximativen Gleichungen (3.10) und (3.11) der kritischen Werte $\tilde{OC}(\theta_0) \approx 1 - \alpha$ gilt, findet man bei KARUS; auf die Wiedergabe dieses Beweises sei hier jedoch verzichtet.¹

Die Annahmewahrscheinlichkeiten an der Stelle $h(\theta_A) = -1$ können ausgehend von den oben angegebenen Werten der OC an der Stelle θ_0 mit Hilfe der Formel (3.117) sehr einfach als

$$\tilde{OC}(\theta_A) \approx B \cdot \tilde{OC}(\theta_0)$$

bestimmt werden. Auch hier ergeben sich, abhängig davon, welche Bestimmung der kritischen Werte zugrunde gelegt wurde, unterschiedliche Ergebnisse. Bei konservativer Lösung findet man

$$\tilde{OC}(\theta_A) \approx B \cdot (1 - \tilde{\alpha}) \approx \beta \cdot \left(1 - \frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha \cdot \beta}\right)$$

und nach einigen Umformungen

$$\tilde{OC}(\theta_A) \approx \frac{\beta \cdot (1 - \alpha)}{1 - \alpha \cdot \beta} \approx \tilde{\beta} \quad (\text{q.e.d.}).$$

In gleicher Weise ergibt sich bei approximativer Lösung

$$\tilde{OC}(\theta_A) \approx B \cdot (1 - \alpha) \approx \frac{\beta}{1 - \alpha} \cdot (1 - \alpha) \approx \beta \quad (\text{q.e.d.}).$$

Diese Herleitungen bestätigen, daß die hier dargestellten Ansätze zur Bestimmung der OC-Funktion sowohl bei approximativer als auch bei konservativer Lösung gültig sind. Ausgehend von (3.123) und (3.124) kann man zeigen, daß unter der Voraussetzung $\alpha, \beta > 0$ die bei konservativer Lösung errechneten Fehlerwahrscheinlichkeiten kleiner als die entsprechenden bei approximativer Lösung errechneten Wahrscheinlichkeiten sind, daß also

1 Vgl. KARUS, H., a.a.O., S. 156 f.

$$\tilde{\alpha} < \alpha \quad \text{bzw.} \quad 1 - \tilde{\alpha} > 1 - \alpha \quad (3.126)$$

und

$$\tilde{\beta} < \beta \quad (3.127)$$

gilt. Man kann also vermuten, daß die bei konservativer Lösung berechnete OC-Funktion steiler als die bei approximativer Lösung berechnete OC-Funktion verläuft.

Die für die beiden auf Seite 40 dieser Arbeit angegebenen Beispiele (1) und (2) errechneten Annahmewahrscheinlichkeiten zu den oben angegebenen fünf Punkten sind in der Tabelle 3.13 abgedruckt.

Lösung	Beispiel	Anteilswert θ				
		0	θ_0	s	θ_A	1
approximativ	(1)	1	0,9500	0,5000	0,0500	0
	(2)	1	0,9500	0,4353	0,0200	0
konservativ	(1)	1	0,9524	0,5000	0,0476	0
	(2)	1	0,9510	0,4337	0,0190	0

Tab. 3.13: Punkte der OC-Funktionen zu ausgewählten Beispielen

Bei einer Beurteilung der hier dargestellten Lösungen ist zu beachten, daß die hier angegebenen Näherungsformeln zur Bestimmung der OC-Funktion, sowohl im Ansatz von WALD wie auch im Ansatz der Statistical Research Group (SRG), die tatsächlichen Fehlerwahrscheinlichkeiten eines Folgetests unterschätzen.¹ Bei Verwendung der approximativen Lösung kann zumindest eine der zulässigen und durch die Formel (3.99) oder (3.105) ausgewiesenen Fehlerwahrscheinlichkeiten überschritten werden; eine Einhaltung der zulässigen Fehlerwahrscheinlichkeiten ist nur im Falle der konservativen Lösung garantiert, für den diese Näherungsformeln Fehlerwahrscheinlichkeiten $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$, die kleiner als die zulässigen Werte sind, ausweisen.

¹ Vgl. S. 85 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

Ob hieraus jedoch geschlossen werden kann, daß eine "Mischlösung", bei der die Bereichsgrenzen anhand der konservativen Lösung und die OC-Funktion anhand der approximativen Lösung bestimmt werden, optimal ist, ist bislang noch reine Spekulation; gesicherte Aussagen hierzu liegen meines Wissens noch nicht vor.

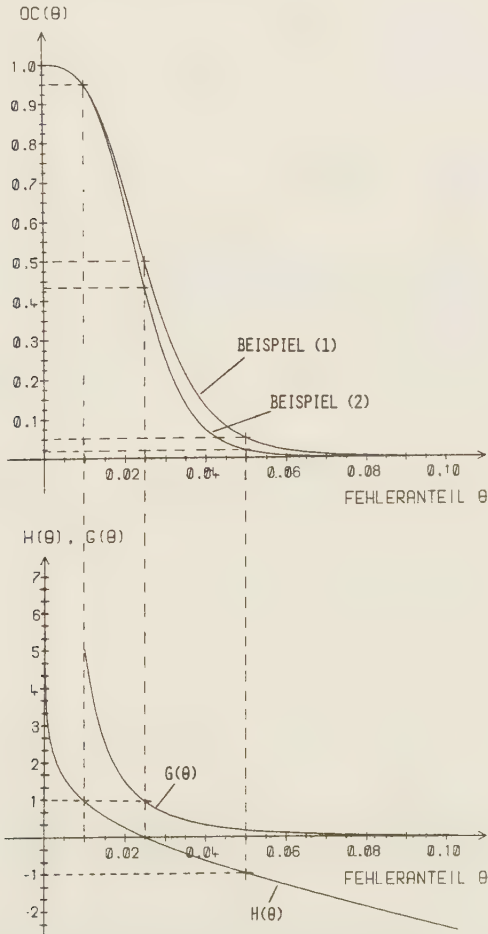


Abb. 3.14: OC-Funktionen $OC(\theta)$ und die entsprechenden Hilfsfunktionen $h(\theta)$ bzw. $g(\theta)$ zu ausgewählten Beispielen

Zu den beiden auf Seite 40 dieser Arbeit angegebenen Beispielen sind die OC-Funktionen bei approximativer Lösung in der vorangegangenen Abbildung 3.14 als Funktion von θ grafisch dargestellt. Zusätzlich sind auch die Hilfsfunktionen $h(\theta)$ und $g(\theta)$ eingezeichnet, die, wie man anhand der Beziehungen (3.103) und (3.106) feststellen kann, nur von θ_0 und θ_A abhängen und deshalb für die beiden hier angegebenen Beispiele übereinstimmen; drei der oben angegebenen fünf Punkte sind in der vorangegangenen Abbildung besonders hervorgehoben.

Ein Nachteil der bisher dargestellten Verfahren zur Bestimmung der OC-Funktion ist, daß es sich hierbei um Näherungslösungen handelt. WALD hat jedoch gezeigt, daß Ober- und Untergrenzen für die OC-Funktion bestimmt werden können.¹ Ausgehend von der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens findet WALD nach einer längeren Herleitung, die im Rahmen dieser Arbeit nicht wiedergegeben werden kann, für den Fall $h(\theta) > 0$ ²

$$\frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - \eta \cdot B^{h(\theta)}} \leq OC(\theta) \leq \frac{\delta \cdot A^{h(\theta)} - 1}{\delta \cdot A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}, \quad (3.128)$$

wobei η und δ im Modell der Binomialverteilung als

$$\eta = \left(\frac{1-\theta_A}{1-\theta_0} \right)^{h(\theta)} \quad (h(\theta) > 0) \quad (3.129)$$

und

$$\delta = \left(\frac{\theta_A}{\theta_0} \right)^{h(\theta)} \quad (h(\theta) > 0) \quad (3.130)$$

gegeben sind.³ Für den Fall $h(\theta) < 0$ findet man dagegen

¹ Vgl. zu den folgenden Ausführungen WALD, A., a.a.O., S. 161 ff. und S. 165; SARKADI, VINCZE, a.a.O., S. 336 f.

² Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 163.

³ Vgl. ebenda, S. 165.

$$\frac{1 - A^{h(\theta)}}{\delta_B h(\theta) - A^{h(\theta)}} \leq OC(\theta) \leq \frac{1 - \eta \cdot A^{h(\theta)}}{B h(\theta) - \eta \cdot A^{h(\theta)}} \quad (3.131)$$

mit

$$\delta = \left(\frac{1 - \theta_A}{1 - \theta_0} \right)^{h(\theta)} \quad (h(\theta) < 0) \quad (3.132)$$

und

$$\eta = \left(\frac{\theta_A}{\theta_0} \right)^{h(\theta)} \quad (h(\theta) < 0) \quad (3.133)$$

als Grenzen der OC-Funktion.¹

Wenn die Bestimmungsgleichungen (3.129) und (3.130) in (3.128) und (3.132) bzw. (3.133) in (3.131) eingesetzt und die Grenzen in (3.131) mit -1 erweitert werden - der Wert der Quotienten ändert sich durch die Erweiterung nicht - findet man, daß die hier angegebenen Grenzen äquivalent sind. Unter Berücksichtigung der durch (3.101) und (3.102) gegebenen Hilfsgrößen G_1 und G_2 kann man diese Grenzen auch als

$$\frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - (B/G_2)^{h(\theta)}} \leq OC(\theta) \leq \frac{(G_1 \cdot A)^{h(\theta)} - 1}{(G_1 \cdot A)^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}} \quad (h(\theta) \neq 0) \quad (3.134)$$

schreiben. Ausgehend von (3.99) erhält man die Obergrenze der OC-Funktion also dadurch, daß man den kritischen Wert A durch $(G_1 \cdot A)$ ersetzt; die Untergrenze der OC-Funktion erhält man dadurch, daß man B durch (B/G_2) ersetzt.

Wenn man annimmt, daß dieses Verfahren auch im Falle $h(s)=0$ gültig ist, würde man hier als Grenzen ausgehend von (3.104)

¹ Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 164 f.

$$\frac{\ln A}{\ln A - \ln (B/G_2)} \leq OC(s) \leq \frac{\ln (A \cdot G_1)}{\ln (A \cdot G_1) - \ln B} \quad (h(s)=0)$$

oder, unter Berücksichtigung von (3.101) und (3.102)

$$\frac{\ln A}{\ln A - \ln B + g_2} \leq OC(s) \leq \frac{\ln A + g_1}{\ln A - \ln B + g_1} \quad (h(s)=0)$$

(3.135)

erhalten. Bei diesem Ansatz nach WALD ist der zusätzliche Rechenaufwand zur Bestimmung der Grenzen relativ gering, allerdings ist das Ergebnis wenig anschaulich und nur schwer zu interpretieren. Ein weiteres, anschaulicheres Verfahren zur Bestimmung dieser Grenzen soll im folgenden dargestellt werden; Ausgangspunkt hierzu ist der von der SRG entwickelte Lösungsweg, der zunächst kurz skizziert werden soll.

Die Statistical Research Group (SRG) geht von der Entscheidungsregel 2 im Binomialmodell¹ aus und erklärt den Näherungscharakter der Beziehung (3.105) durch die Notwendigkeit einer Rundung der exakten Annahmegrenze $c(y)$ auf die nächstkleinere ganze Zahl und der exakten Rückweisegrenze $d(y)$ auf die nächstgrößere ganze Zahl.² Die durch diese Rundung maximal mögliche Abweichung zwischen den exakten und den gerundeten Werten ist kleiner als 1. Eine Untergrenze für die Punkte, die zur Annahme der H_0 führen, erhält man, indem man die Annahmegerade um eine Einheit nach unten verschiebt; eine Obergrenze für die Punkte, die zur Rückweisung der H_0 führen, erhält man, wenn man die Rückweisegerade um eine Einheit nach oben verschiebt. Auf dieser Überlegung aufbauend leitet die SRG als Grenzen für die OC-Funktion

¹ Vgl. S. 94 ff. dieser Arbeit.

² Vgl. zu den folgenden Ausführungen SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. B.29 f. und S. B.21 ff.

$$\frac{g(\theta)^{h_1+h_2+1} - g(\theta)^{h_1+1}}{g(\theta)^{h_1+h_2+1} - 1} \leq OC(\theta) \leq \frac{g(\theta)^{h_1+h_2+1} - g(\theta)^{h_1}}{g(\theta)^{h_1+h_2+1} - 1}$$

(g(\theta) \neq 1) \quad (3.136)

ab.¹ Man erhält also ausgehend von (3.105) eine Obergrenze für die OC-Funktion dadurch, daß h_2 durch h_2+1 ersetzt wird; eine Untergrenze für die OC-Funktion erhält man dadurch, daß h_1 durch h_1+1 ersetzt wird. Dies gilt, wie man zeigen kann, sowohl im Falle $g(\theta) > 1$ als auch im Falle $g(\theta) < 1$; auf einen Beweis sei hier jedoch verzichtet.

Das durch die SRG bestimmte Intervall ist jedoch unnötig groß, wie man durch die folgende Herleitung zeigen kann. Bei Annahme der H_0 im Punkt $P(x;y)$ kann - Einzelentnahme der Elemente vorausgesetzt - der vertikale Abstand zur Annahmegerade $c(y)$ nicht größer als s sein, weil sonst schon im Punkte $P(x;y-1)$ eine Annahme der H_0 hätte erfolgen müssen. Ebenso kann bei Rückweisung der H_0 im Punkte $P(x;y)$ der vertikale Abstand zur Rückweisegerade $d(y)$ nicht größer als $1-s$ sein, weil sonst schon im Punkte $P(x-1;y-1)$ eine Rückweisung der H_0 möglich gewesen wäre. Dabei bedeutet s die Steigung der Bereichsgrenzen, die durch (3.31) bestimmt ist.² Analog zu den Überlegungen der SRG erhält man ausgehend von (3.105) eine Obergrenze für die OC-Funktion dadurch, daß h_2 durch h_2+1-s ersetzt wird; eine Untergrenze erhält man dadurch, daß h_1 durch h_1+s ersetzt wird.

$$\frac{g(\theta)^{h_1+h_2+s} - g(\theta)^{h_1+s}}{g(\theta)^{h_1+h_2+s} - 1} \leq OC(\theta) \leq \frac{g(\theta)^{h_1+h_2+1-s} - g(\theta)^{h_1}}{g(\theta)^{h_1+h_2+1-s} - 1}$$

(g(\theta) \neq 1) \quad (3.137)

1 Vgl. zu den folgenden Ausführungen SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. B.30.

2 Vgl. S. 94 dieser Arbeit. Unter der Voraussetzung, daß $0 < \theta_0 < \theta_A < 1$ gilt, findet man $0 < s < 1$.

Wenn man unterstellt, daß dieses Verfahren zur Konstruktion von Grenzen für die OC-Funktion auch im Falle $g(s)=1$ gültig ist, findet man ausgehend von (3.107)

$$\frac{h_2}{h_1+h_2+s} \leq OC(s) \leq \frac{h_2+1-s}{h_1+h_2+1-s} \quad (g(s)=1) \quad (3.138)$$

Zur Veranschaulichung dieser Herleitung ist in der Abbildung 3.15 die Konstruktion der Untergrenzen für $c(y)$ und der Obergrenzen für $d(y)$ sowohl für den Ansatz der SRG als auch für die hier entwickelte "verbesserte" Lösung für ein Beispiel mit $s=0,2$ grafisch dargestellt.

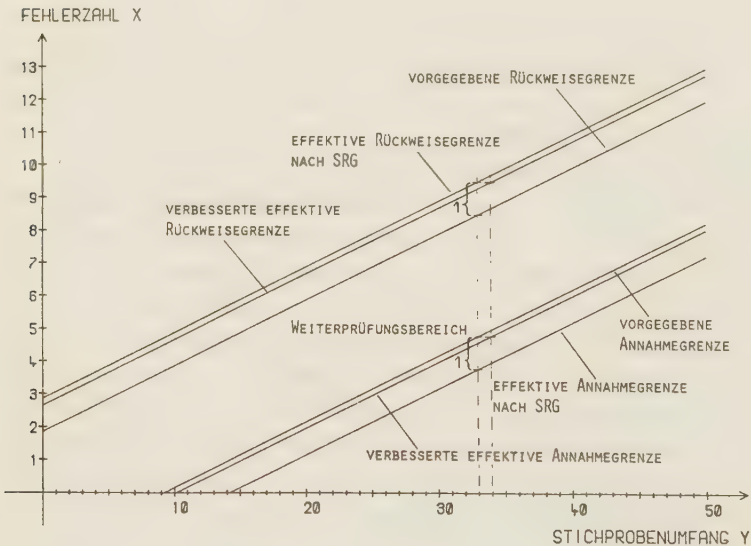


Abb. 3.15: Tatsächliche Bereichsgrenzen und "gedachte" Bereichsgrenzen zur Herleitung von Grenzen für die OC-Funktion

Die hier zuletzt dargestellten "verbesserten" Grenzen (3.137) bzw. (3.138) für die OC-Funktion stimmen, wie hier gezeigt werden soll, mit den von WALD hergeleiteten Grenzen (3.134) bzw. (3.135) überein. Im ersten Schritt kann man (3.137) umformen zu

$$\frac{g(\theta)^{h_2} - 1}{g(\theta)^{h_2} - g(\theta)^{-h_1-s}} \leq OC(\theta) \leq \frac{g(\theta)^{h_2+1-s} - 1}{g(\theta)^{h_2+1-s} - g(\theta)^{-h_1}},$$

in einem weiteren Schritt, unter Berücksichtigung von (3.112) zu

$$\begin{aligned} & \frac{e^{(g_1+g_2)h_2 \cdot h(\theta)} - 1}{e^{(g_1+g_2)h_2 \cdot h(\theta)} - e^{(g_1+g_2)(-h_1-s) \cdot h(\theta)}} \leq OC(\theta) \leq \\ & \leq \frac{e^{(g_1+g_2)(h_2+1-s) \cdot h(\theta)} - 1}{e^{(g_1+g_2)(h_2+1-s) \cdot h(\theta)} - e^{(g_1+g_2)(-h_1) \cdot h(\theta)}}. \end{aligned}$$

Wenn für die Koeffizienten s , h_1 und h_2 die Bestimmungsgleichungen (3.31) bis (3.33) eingesetzt und durch (g_1+g_2) gekürzt wird, findet man

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\ln A \cdot h(\theta)} - 1}{e^{\ln A \cdot h(\theta)} - e^{(\ln B - g_2) \cdot h(\theta)}} \leq OC(\theta) \leq \\ & \leq \frac{e^{(\ln A + g_1) \cdot h(\theta)} - 1}{e^{(\ln A + g_1) \cdot h(\theta)} - e^{\ln B \cdot h(\theta)}}. \end{aligned}$$

Da allgemein $e^{\ln a + b} = a \cdot e^b$ gilt, folgt hieraus nach einigen Umformungen und Berücksichtigung von (3.101) und (3.102)

$$\frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - (B/G_2)^{h(\theta)}} \leq OC(\theta) \leq \frac{(A \cdot G_1)^{h(\theta)} - 1}{(A \cdot G_1)^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}} \quad (\text{q.e.d.}).$$

Der Beweis der Übereinstimmung von (3.135) und (3.138) ist sehr einfach möglich, wenn in (3.138) für die Koeffizienten s , h_1 und h_2 die Bestimmungsgleichungen (3.31) bis (3.33) eingesetzt werden; auf eine Darstellung sei hier jedoch verzichtet.

In diesem Abschnitt ist also bewiesen worden, daß die gegenüber der SRG verbesserten Grenzen (3.137) und (3.138) mit den von WALD hergeleiteten Grenzen für die OC-Funktion sachlich gleichbedeutend sind. Im Gegensatz zu dem Ansatz von WALD können die hier abgeleiteten Grenzen sehr anschaulich interpretiert werden: Die Grenzen der OC-Funktion werden, wie in Abbildung 3.15 dargestellt wurde, durch die Untergrenze für die Annahmegerade und die Obergrenze für die Rückweisegerade bestimmt. Vom Rechenaufwand her gesehen sind beide Ansätze etwa gleichwertig; es empfiehlt sich jedoch, bei der Berechnung der Grenzen den gleichen Ansatz wie bei der Berechnung der OC-Funktion selbst zu wählen.

Zur Veranschaulichung sind hier zu Beispiel (1) bei approximativer Lösung die Grenzen für die OC-Funktion anhand von (3.134) bzw. (3.135) berechnet und in der folgenden Abbildung 3.16 dargestellt worden.

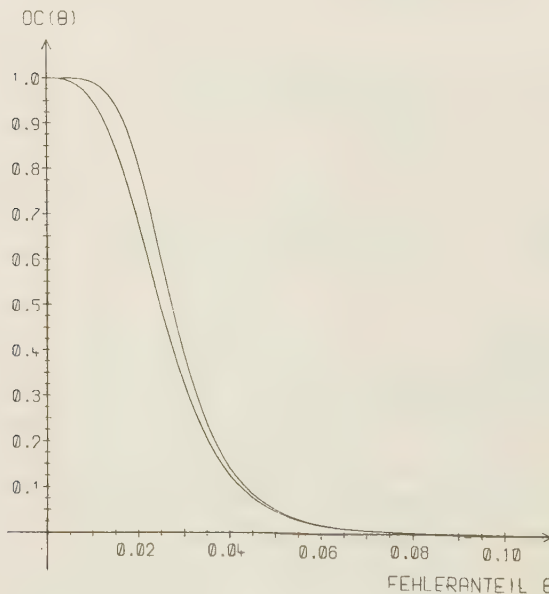


Abb. 3.16: Grenzen für die OC-Funktion eines Folgetests

Man erkennt, daß der Abstand der beiden Grenzen für mittlere Werte von θ sehr groß ist. Zur Abschätzung des tatsächlichen Verlaufes der OC-Funktion oder auch des Verlaufes der ASN-Funktion, die, wie im folgenden Punkt 3.5.3 zu zeigen sein wird, auf der OC-Funktion aufbaut, dürften diese Grenzen deshalb kaum geeignet sein. Sinnvoller wäre vermutlich die Entwicklung einer Approximationsformel, in der die möglichen Überschreitungen der Bereichsgrenzen bereits berücksichtigt sind.

Eine solche Approximation der OC-Funktion könnte man eventuell dadurch erhalten, daß in den Beziehungen (3.105) bzw. (3.107) h_1 durch $h_1+s/2$ und h_2 durch $h_2+(1-s)/2$ ersetzt würde. Damit würde man

$$\tilde{OC}(\theta) \approx \frac{g(\theta)^{h_1+h_2+1/2} - g(\theta)^{h_1+s/2}}{g(\theta)^{h_1+h_2+1/2} - 1} \quad (g(\theta) \neq 1) \quad (3.139)$$

bzw.

$$\tilde{OC}(s) \approx \frac{h_2+(1-s)/2}{h_1+h_2+1/2} \quad (g(s)=1) \quad (3.140)$$

als Näherung für die OC-Funktion erhalten; dabei ist $g(\theta)$ wie bisher durch die Gleichung (3.106) gegeben. Beispielrechnungen, bei denen als Vergleichsgrundlage das in Abschnitt 4.3 darzustellende Rekursionsverfahren verwendet wurde, ergaben eine teilweise recht gute Übereinstimmung zwischen den approximativ mit Hilfe von (3.139) bzw. (3.140) und den rekursiv berechneten Werten der OC-Funktion. Um zuverlässige Aussagen über die Güte dieser Näherung abzuleiten, wären jedoch weitergehende Untersuchungen notwendig, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

Andere Ansätze zur Bestimmung verbesserter Näherungen für die OC-Funktion, z. B. die von KEMP und PAGE entwickelten Verfahren,¹ sollen aus den im folgenden anzuführenden Gründen hier nicht dargestellt werden: Bei wachsendem Aufwand zur Herleitung der Näherungen sind die tatsächlich möglichen Verbesserungen sehr gering. Alle entwickelten Lösungen besitzen Näherungscharakter, der erstens in der Definition der kritischen Werte A und B und zweitens in der möglichen Überschreitung der Bereichsgrenzen begründet liegt. Außerdem können eventuelle Modifikationen der Entscheidungsregel, z. B. durch Entnahme der Elemente in Gruppen und/oder durch die Einführung einer Abbruchregel, kaum erfaßt werden.

Für den Fall einer Entnahme und Auswertung in Gruppen von jeweils n_d Elementen hat WALD Unter- und Obergrenzen für die OC-Funktion entwickelt.² Er geht dabei von "Hilfsplänen" aus, in denen h_1 durch $h_1 + s \cdot n_d$ bzw. h_2 durch $h_2 + s \cdot n_d$ ersetzt worden sind. Diese Methode ähnelt dem von der SRG entworfenen Verfahren zur Bestimmung von Grenzen für die OC-Funktion, weicht im Ergebnis jedoch etwas davon ab. Sinnvoller dürfte vermutlich sein, wie man sich anhand von Abbildung 3.1 verdeutlichen kann, zur Bestimmung der Obergrenze h_2 durch $h_2 + (1-s) \cdot n_d$ und zur Bestimmung der Untergrenze h_1 durch $h_1 + s \cdot n_d$ zu ersetzen. Eine Diskussion dieser Vorschläge soll jedoch unterbleiben, da eine Entnahme und Auswertung in Gruppen allgemein nicht empfohlen werden kann³ und zudem die oben angegebenen Grenzen für die OC-Funktion soweit auseinander liegen, daß sie praktisch unbrauchbar sind.

1 Vgl. GHOSH, B.K., a.a.O., S. 205 ff.; PAGE, E.S., An Improvement to WALD's Approximation for Some Properties of Sequential Tests, JRSS B 16 (1954), S. 136 ff.; KEMP, K.W., Formulae on Calculating the Operating Characteristic and the Average Sample Number of Some Sequential Tests, JRSS B 20 (1958), S. 379 ff.

2 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 103 f.

3 Vgl. die Ausführungen auf S. 129 ff. dieser Arbeit.

Auch die Auswirkungen einer vorgegebenen Abbruchregel¹ auf den Verlauf der OC-Funktion können allenfalls abgeschätzt werden. WALD entwickelt, ausgehend von dem durch (3.98) bestimmten Abbruchkriterium, obere Grenzen für die Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster bzw. zweiter Art.² Dabei geht er von der Annahme aus, daß die logarithmierte Prüfgröße $l(x;y)$ annähernd normalverteilt ist. Der Gang der Herleitung und auch die von WALD gefundenen Ergebnisse sollen hier jedoch nicht dargestellt werden, da WALD selbst vermutet, daß die gefundenen Grenzen weit über den tatsächlichen Fehlerwahrscheinlichkeiten liegen.³ Aus diesem Grunde dürften diese Grenzen zur Auswahl einer zulässigen Abbruchregel, die die Einhaltung der vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten eines α - und β -Fehlers gerade noch garantiert, nicht geeignet sein.

3.5.3 ASN-Funktion des Folgetestverfahrens nach WALD

Formeln zur Bestimmung der ASN-Funktion (average sample number function, Kurve des durchschnittlichen Stichprobenumfangs)⁴ sind von WALD und von der Statistical Research Group (SRG) auf verschiedene Weise hergeleitet worden. Bei den Ansätzen gemeinsam ist, daß sie nur Näherungsformeln liefern, in denen die ASN-Funktion als Funktion der Operationscharakteristik (OC-Funktion) eines Folgetests bestimmt wird. In dieser Arbeit soll als Grundlage der Ansatz von WALD verwendet werden, der, wie gezeigt werden kann, mit dem von der SRG gefundenen Ergebnis sachlich gleichbedeutend ist. Im Anschluß an eine kurze Darstellung der wich-

1 Vgl. S. 142 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 61 ff. Eine ähnliche Herleitung gibt auch WILKS, S.S., a.a.O., S. 492 ff.

3 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 65.

4 Vgl. auch S. 16 und S. 47 ff. dieser Arbeit.

tigsten Eigenschaften dieser Näherung sind Möglichkeiten zur Bestimmung von Grenzen für die ASN-Funktion zu diskutieren.

Eine ausführliche Wiedergabe der von WALD gegebenen Herleitung¹ erscheint nicht notwendig, da gleichlautende oder ähnliche Herleitungen in zahlreichen anderen Literaturstellen abgedruckt sind.² Ausgehend von der allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens in logarithmischer Form³ findet WALD

$$E(\ln L(x;y)) = E(Y/\theta) \cdot E \left(\ln \frac{f(x_j/\theta_A)}{f(x_j/\theta_0)} \right) \quad (j=1,2,\dots) \quad (3.141)$$

für den Erwartungswert der logarithmierten Prüfgröße (3.7) des Folgetestverfahrens.⁴ Wenn eine mögliche Überschreitung der Bereichsgrenzen vernachlässigt wird, kann dieser Erwartungswert auch als

$$E(\ln L(x;y)) \approx OC(\theta) \cdot \ln B + (1-OC(\theta)) \cdot \ln A \quad (3.142)$$

bestimmt werden.⁵ Weiterhin ergibt sich im Modell der Binomialverteilung

$$E \left(\ln \frac{f(x_j/\theta_A)}{f(x_j/\theta_0)} \right) = \theta \cdot \ln \frac{\theta_A}{\theta_0} + (1-\theta) \cdot \ln \frac{1-\theta_A}{1-\theta_0} \quad (j=1,2,\dots) \quad (3.143)$$

als Erwartungswert des Beitrages eines Stichprobenelementes zur logarithmierten Prüfgröße.⁶ Durch Auflösen von

1 Vgl. zum folgenden vor allem WALD, A., a.a.O., S. 52 ff.

2 Vgl. z. B. KARUS, H., a.a.O., S. 162 ff.; FISZ, M., a.a.O., S. 688 ff.; KENDALL, STUART, The Advanced Theory..., Vol. 2 ..., a.a.O., S. 623 f.; LEHMANN, E.L., a.a.O., S. 103 f.; SARKADI, VINCZE, a.a.O., S. 337 ff.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 19 f.; WILKS, S.S., a.a.O., S. 489 ff.; GHOSH, B.K., a.a.O., S. 69 ff.

3 Vgl. S. 81 f. dieser Arbeit.

4 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 53; LEHMANN, E.L., a.a.O., S. 103.

5 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 53; FISZ, M., a.a.O., S. 689.

6 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 53; FISZ, M., a.a.O., S. 692.

(3.141) nach $E(Y/\theta)$ und Einsetzen von (3.142) und (3.143) findet man

$$\tilde{ASN}(\theta) = E(Y/\theta) \approx \frac{OC(\theta) \cdot \ln B + (1-OC(\theta)) \cdot \ln A}{\theta \cdot \ln \frac{\theta_A}{\theta_0} + (1-\theta) \cdot \ln \frac{1-\theta_A}{1-\theta_0}} \quad (3.144)$$

als Näherung für die ASN-Funktion eines Folgetests im Modell der Binomialverteilung.¹

Diese Beziehung kann unter Berücksichtigung der durch (3.26) und (3.27) gegebenen Hilfsgrößen g_1 und g_2 auch als

$$\tilde{ASN}(\theta) \approx \frac{OC(\theta) \cdot \ln B + (1-OC(\theta)) \cdot \ln A}{\theta \cdot g_1 - (1-\theta) \cdot g_2} \quad (\theta \neq s)$$

oder, nach einigen Umformungen, als

$$\tilde{ASN}(\theta) \approx \frac{OC(\theta) \cdot (\ln B - \ln A) + \ln A}{\theta \cdot (g_1 + g_2) - g_2} \quad (\theta \neq s) \quad (3.145)$$

geschrieben werden. Wenn Zähler und Nenner durch $(g_1 + g_2)^{-1}$ dividiert und die durch (3.31) bis (3.33) bestimmten Koeffizienten s , h_1 und h_2 der Geradengleichungen eingesetzt werden, findet man schließlich

$$\tilde{ASN}(\theta) \approx \frac{OC(\theta) \cdot (h_1 + h_2) - h_2}{s - \theta} \quad (\theta \neq s) \quad (3.146)$$

als Näherung für die ASN-Funktion eines Folgetests.¹ Die hier gefundene Beziehung (3.146) ist mit der von der SRG abgeleiteten Näherung für die ASN-Funktion identisch.² Die Herleitung der SRG beruht unmittelbar auf der Entscheidungsregel 2 im Binomialmodell³; diese Herleitung soll hier

1 Eine ähnliche wie die oben dargestellte Herleitung gibt KARUS, H., a.a.O., S. 168 f.

2 Vgl. SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. B.31 ff.

3 Vgl. S. 93 ff. dieser Arbeit.

nicht dargestellt werden, da sie sehr aufwendig ist und zudem in ähnlicher Form auch an anderer Stelle in der Literatur angegeben ist.¹

Alle hier angegebenen Näherungsformeln für die ASN-Funktion sind im Falle $\theta = s$ unbestimmt. In diesem Fall findet man - auf eine Wiedergabe der Ableitung sei der Einfachheit halber verzichtet -

$$\tilde{ASN}(s) \approx \frac{-\ln B \cdot \ln A}{\ln \frac{\theta_A}{\theta_0} \cdot \ln \frac{1-\theta_0}{1-\theta_A}} \quad (3.147)$$

als Wert der Näherung.² Diese Näherung kann unter Verwendung der Hilfsgrößen g_1 und g_2 auch als

$$A\tilde{SN}(s) \approx \frac{-\ln B \cdot \ln A}{g_1 \cdot g_2}$$

oder, wenn Zähler und Nenner durch $(g_1+g_2)^2$ dividiert und die durch (3.31) bis (3.33) bestimmten Koeffizienten eingesetzt werden, als

$$A\tilde{SN}(s) \approx \frac{h_1 \cdot h_2}{s \cdot (1-s)} \quad (3.148)$$

geschrieben werden. Diese Beziehung (3.148) ist die in der Literatur meistgebrauchte Form der ASN-Funktion für einen Fehleranteil von s .³ Der durch (3.148) bestimmte Punkt kann auch, wie die SRG festgestellt hat, als Näherung für das unbekannte Maximum der ASN-Funktion verwendet werden.⁴

1 Vgl. WEBER, E., a.a.O., S. 439 f. Eine wiederum andere Herleitung gibt UHLMANN, W., Statistische Qualitätskontrolle, a.a.O., S. 143.

2 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 176 und S. 100 f.; FISZ, M., a.a.O., S. 689 f. und S. 692.

3 Vgl. KARUS, H., a.a.O., S. 170 f.; WEBER, E., a.a.O., S. 441; SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 2.65; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 51; COWDEN, D.J., a.a.O., S. 558; DUNCAN, A.J., a.a.O., S. 178; SCHULTE, E., a.a.O., S. 140.

4 Vgl. SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 2.67.

Bei den hier dargestellten Ableitungen wurden die kritischen Werte A und B und die OC-Funktion $OC(\theta)$ als bekannt vorausgesetzt. Für die kritischen Werte A und B wird in der Literatur im allgemeinen die Verwendung der approximativen Bestimmungsgleichungen (3.10) und (3.11) unterstellt. Die Näherungsformeln (3.144) und (3.147) sind jedoch ohne Unterschied auch bei Verwendung der konservativen Bestimmungen (3.17) und (3.18) gültig. In gleicher Weise sind auch (3.146) bzw. (3.148) sowohl bei approximativer als auch bei konservativer Lösung verwendbar, abhängig davon, ob für die Koeffizienten h_1 und h_2 die approximativen oder die konservativen Werte eingesetzt werden.¹

Die OC-Funktion ist dagegen im allgemeinen nicht bekannt, so daß statt dessen die in Punkt 3.5.2 dieser Arbeit dargestellten Näherungen (3.99) bzw. (3.105) anstelle von $OC(\theta)$ in die Näherungsformeln (3.144) oder (3.146) zur Berechnung der ASN-Funktion eingesetzt werden. Ausgehend von den in Tabelle 3.12 angegebenen fünf Punkten der OC-Funktion können hier fünf Punkte der ASN-Funktion sehr einfach bestimmt werden.² Diese fünf Punkte dürften zu einer Skizzierung der ASN-Funktion genügen; ihre Koordinaten sind in der folgenden Tabelle 3.14 angegeben.³

1 Eine Übersicht der entsprechenden Werte zu den Beispielen (1) und (2) gibt die Tabelle 3.2 auf S. 97 dieser Arbeit.

2 Zur Herleitung dieser Punkte vgl. z. B. KARUS, H., a.a.O., S. 169 ff.

3 Vgl. GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 51.

Anteils- wert θ	ASN(θ) bei approximativer Lösung	ASN(θ) bei konservativer Lösung
0	$\frac{h_1}{s}$	$\frac{h_1}{s}$
θ_0	$\frac{(1-\alpha) \cdot h_1 - \alpha \cdot h_2}{s - \theta_0}$	$\frac{(1-\tilde{\alpha}) \cdot h_1 - \tilde{\alpha} \cdot h_2}{s - \theta_0}$
s	$\frac{h_1 \cdot h_2}{s(1-s)}$	$\frac{h_1 \cdot h_2}{s(1-s)}$
θ_A	$\frac{\beta \cdot h_1 - (1-\beta) \cdot h_2}{s - \theta_A}$	$\frac{\tilde{\beta} \cdot h_1 - (1-\tilde{\beta}) \cdot h_2}{s - \theta_A}$
1	$\frac{h_2}{1-s}$	$\frac{h_2}{1-s}$

Tab. 3.14: Fünf Punkte der ASN-Funktion eines Folgetests

In dieser Tabelle stehen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ für die durch (3.121) bzw. (3.122) bestimmten Wahrscheinlichkeiten. Man erkennt, daß die Werte der ASN-Funktion an den Stellen $\theta = 0$ bzw. $\theta = 1$ mit den bereits auf Seite 98 dieser Arbeit angegebenen Mindeststichprobenumfängen zur Annahme bzw. Rückweisung der H_0 übereinstimmen.

Zu den beiden auf Seite 40 dieser Arbeit eingeführten Beispielen erhält man bei approximativer bzw. bei konservativer Lösung die in der Tabelle 3.15 abgedruckten Näherungswerte für die fünf Punkte der ASN-Funktion. Die Ergebnisse sind hier auf zwei Nachkommastellen gerundet, die Rechnung selbst wurde jedoch mit voller verfügbarer Genauigkeit durchgeführt.¹ Die entsprechenden ASN-Funktionen sind außerdem in der Abbildung 3.17 grafisch dargestellt.

¹ Zur Berechnung wurde ein programmierbarer Taschenrechner vom Typ Texas Instruments-59 des Instituts für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik der WWU Münster verwendet.

Lösung	Bei- spiel	Anteilswert θ				
		0	θ_0	s	θ_A	1
approximativ	(1)	71,39	107,13	130,61	64,18	1,83
	(2)	93,61	142,26	173,07	68,75	1,85
konservativ	(1)	72,64	109,57	135,20	65,64	1,86
	(2)	94,85	144,45	176,56	69,37	1,86

Tab. 3.15: Punkte der ASN-Funktionen zu ausgewählten Beispielen

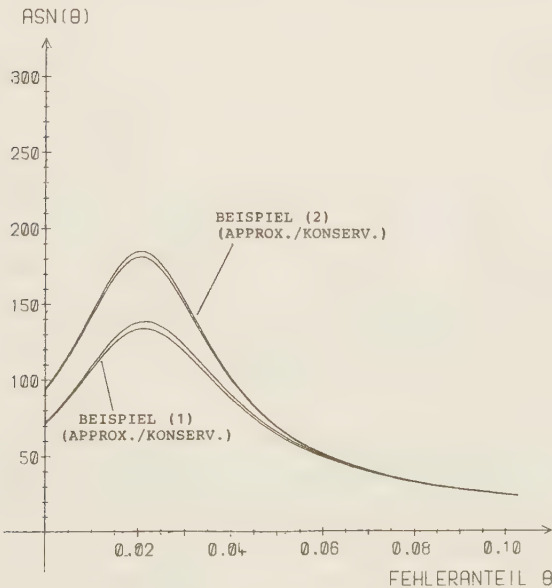


Abb. 3.17: ASN-Funktionen von Folgetests zu ausgewählten Beispielen

Aus der Tabelle 3.15 und der Abbildung 3.17 erkennt man, daß bei konservativer Lösung die ASN-Funktion geringfügig höher verläuft als bei approximativer Lösung. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da ja bei konservativer Lösung der Weiterprüfungsbereich des Folgetestverfahrens breiter ist

als bei approximativer Lösung.¹ Denkbar wäre auch hier eine "Mischlösung" derart, daß die Koeffizienten h_1 und h_2 anhand der konservativen, die Fehlerwahrscheinlichkeiten α und β jedoch anhand der approximativen Lösung bestimmt werden, da ja durch die Näherungen (3.99) bzw. (3.105) für die OC-Funktion die tatsächlichen Fehlerwahrscheinlichkeiten im allgemeinen unterschätzt werden. Über die Zweckmäßigkeit einer solchen Lösung liegen jedoch noch keine Aussagen vor.

Als problematisch erweist sich jedoch eine Abschätzung der bei Anwendung eines Folgetests durchschnittlich möglichen Einsparungen gegenüber einem passenden anderen Test - z. B. einem abgebrochenen Einfach- oder Doppeltest² - anhand der hier hergeleiteten Näherung für die ASN-Funktion, da diese Näherung die wahre ASN-Funktion wesentlich unterschätzen kann.³ Der Näherungscharakter entsteht, wie man aus der oben skizzierten Ableitung von WALD erkennen kann, aus zwei Ursachen: erstens kann der Erwartungswert der logarithmierten Prüfgröße durch (3.142) nur näherungsweise bestimmt werden, weil mögliche Überschreitungen der Bereichsgrenzen vernachlässigt werden; zweitens ist auch die OC-Funktion nur näherungsweise bekannt.

Grenzen für die ASN-Funktion sind von WALD gefunden worden, der zunächst allgemeine Beziehungen für beliebige Verteilungen der Stichprobe ableitet und dann in einem zweiten Schritt die Koeffizienten dieser Beziehungen für das Modell der Binomialverteilung bestimmt.⁴ Der Gang der Herleitung soll hier, da diese Ableitungen sehr umfangreich sind, nicht wiedergegeben werden; anzugeben sind nur die von

1 Vgl. S. 87 ff. und S. 97 dieser Arbeit.

2 Vgl. Abschnitt 2.5 dieser Arbeit.

3 Vgl. WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 22 f.; GUENTHER, W.C., Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 52 f.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

4 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 170 ff. und S. 179.

WALD gefundenen Ergebnisse. Wenn die von WALD im Binomialmodell bestimmten Koeffizienten in die von ihm gegebenen allgemeinen Beziehungen eingesetzt und zudem zur Vereinfachung die durch (3.26) und (3.27) bestimmten Hilfsgrößen g_1 und g_2 berücksichtigt werden, erhält man im Falle $h(\theta) < 0$ (bzw. $\theta > s$)

$$\begin{aligned} \frac{OC(\theta)(\ln B - g_2) + (1-OC(\theta)) \cdot \ln A}{\theta \cdot g_1 - (1-\theta) \cdot g_2} &\leq ASN(\theta) \leq \\ &\leq \frac{OC(\theta) \cdot \ln B + (1-OC(\theta))(\ln A + g_1)}{\theta \cdot g_1 - (1-\theta) \cdot g_2} \\ &(\theta > s; h(\theta) < 0) \end{aligned} \quad (3.149)$$

und im Falle $h(\theta) > 0$ (bzw. $\theta < s$)

$$\begin{aligned} \frac{OC(\theta) \cdot \ln B + (1-OC(\theta))(\ln A + g_1)}{\theta \cdot g_1 - (1-\theta) \cdot g_2} &\leq ASN(\theta) \leq \\ &\leq \frac{OC(\theta)(\ln B - g_2) + (1-OC(\theta)) \cdot \ln A}{\theta \cdot g_1 - (1-\theta) \cdot g_2} \\ &(\theta < s; h(\theta) > 0) \end{aligned} \quad (3.150)$$

als Grenzen für die ASN-Funktion. Diese Grenzen können, ähnlich wie auf Seite 171 dieser Arbeit dargestellt, auch zu

$$\frac{OC(\theta)(h_1 + h_2 + s) - h_2}{s - \theta} \leq ASN(\theta) \leq \frac{OC(\theta)(h_1 + h_2 + 1 - s) - (h_2 + 1 - s)}{s - \theta}$$

für $(\theta > s; h(\theta) < 0)$ (3.151)

bzw. zu

$$\frac{OC(\theta)(h_1 + h_2 + 1 - s) - (h_2 + 1 - s)}{s - \theta} \leq ASN(\theta) \leq \frac{OC(\theta)(h_1 + h_2 + s) - h_2}{s - \theta}$$

für $(\theta < s; h(\theta) > 0)$ (3.152)

umgeformt werden. Auf eine Wiedergabe der entsprechenden Herleitungen sei hier jedoch verzichtet.

Die Beziehung (3.151) läßt sich, wie man sieht, in die Beziehung (3.152) überführen, wenn man die "Kleiner gleich"-Zeichen in "Größer gleich"-Zeichen ändert. Da sich diese Zeichen auch bei Multiplikation mit einer negativen Zahl umkehren¹ und $(s-\theta)$ im Falle $\theta > s$ negativ und im Falle $\theta < s$ positiv ist, kann man die beiden hier angegebenen Ungleichungen zu einer einzigen zusammenfassen, wenn man sie mit $(s-\theta)$ oder mit $(\theta-s)$ multipliziert. Bei Multiplikation mit $(\theta-s)$ findet man

$$\begin{aligned} OC(\theta)(h_1+h_2+s)-h_2 &\leq (\theta-s)ASN(\theta) \leq \\ &\leq OC(\theta)(h_1+h_2+1-s)-(h_2+1-s) \end{aligned} \quad (3.153)$$

als Grenzen für das Produkt $(\theta-s)ASN(\theta)$. Gegenüber dem aus der Beziehung (3.146) bestimmten Wert für $(\theta-s)ASN(\theta)$ erhält man also Untergrenzen dadurch, daß h_1 durch h_1+s ersetzt wird; Obergrenzen erhält man dadurch, daß h_2 durch h_2+1-s ersetzt wird. Dieses Verfahren ist also dem Verfahren zur Bestimmung von Grenzen für die OC-Funktion sehr ähnlich;² zu beachten ist allerdings, daß der Wert des Produktes $(\theta-s)ASN(\theta)$ im Falle $\theta < s$ negativ ist.

Als Grundlage zur Beurteilung der mit dem Folgetestverfahren möglichen Einsparungen sind in der Abbildung 3.18 zu den beiden auf Seite 40 dieser Arbeit eingeführten Beispielen die durch (3.144) bis (3.148) gegebenen Näherungen für die ASN-Funktion und die durch (3.151) und (3.152) gegebenen Obergrenzen der ASN-Funktion passender Folgetests (konservative Lösung) sowie die bereits in Abbildung 2.15 gegebenen ASN-Funktionen passender (abgebrochener) Einfach- und Doppeltests dargestellt. Man erkennt, daß die

1 Vgl. GELLERT, W., u. a. (Hrsg.), a.a.O., S. 124.

2 Vgl. die Ausführungen auf S. 162 ff. dieser Arbeit.

ASN(θ) in beiden Beispielen durchweg unterhalb der ASN-Funktionen der entsprechenden Einfach- bzw. Doppeltests verläuft. Die Obergrenzen der ASN-Funktion beim Folgetest liegen für kleine oder große Fehleranteile ebenfalls unterhalb, für mittlere Fehleranteile dagegen deutlich oberhalb der ASN-Funktionen entsprechender (abgebrochener) Einfach- oder Doppeltests. Für Fehleranteile zwischen θ_0 und θ_A besitzen deshalb, wie bereits WALD feststellt, die hier hergeleiteten Grenzen keine praktische Bedeutung.¹

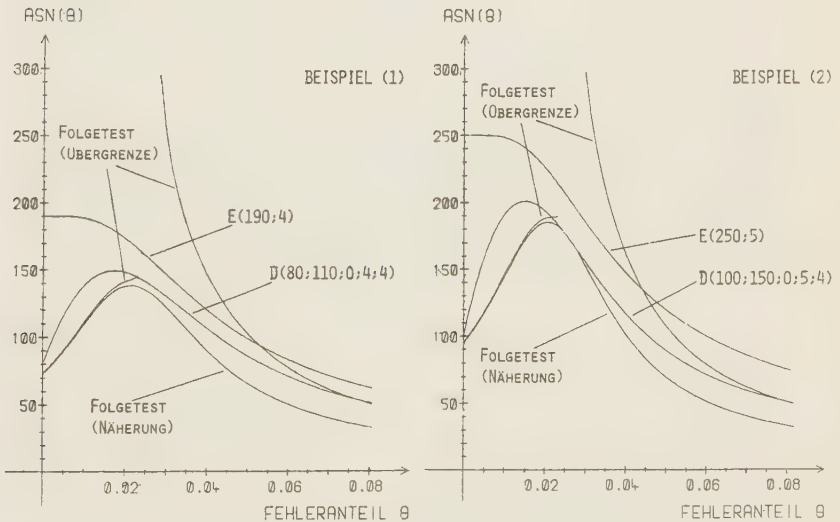


Abb. 3.18: Näherungen und Obergrenzen für die ASN-Funktionen von Folgetests sowie ASN-Funktionen von Einfach- und Doppeltests zu ausgewählten Beispielen

¹ Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 172.

Ein von der SRG entwickelter Ansatz zur Bestimmung von Ober- und Untergrenzen führt, wie sich zeigen läßt, zu noch weiter auseinander liegenden Grenzen als der oben dargestellte Ansatz von WALD und soll deshalb in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.¹ Von größerer praktischer Bedeutung als die Bestimmung von Grenzen für die ASN-Funktion² dürfte die Bestimmung verbesserter Näherungslösungen sein, in denen die Möglichkeit einer Überschreitung der Bereichsgrenzen explizit berücksichtigt wird.³ Eine Darstellung dieser Lösungsansätze soll hier unterbleiben, da der Nutzen dieser Approximationen im Verhältnis zum zusätzlichen Aufwand relativ gering ist. Exakte Aussagen über die OC- und ASN-Funktion eines konkreten Folgetests anhand eines qualitativen Merkmals sind im allgemeinen nicht mit einem dieser Lösungsansätze, sondern nur mit einem der im vierten Kapitel dieser Arbeit vorzustellenden Verfahren möglich. Ebenso lassen sich auch die Auswirkungen von Modifikation z. B. durch eine Entnahme in Gruppen⁴ oder durch die Vereinbarung einer Abbruchregel auf die OC- und ASN-Funktion eines konkreten Folgetests nur mit den dort zu behandelnden Verfahren zuverlässig bestimmen; alle bisher bekannten Ansätze zur Bestimmung von Näherungslösungen bzw. von Grenzen für die OC- und ASN-Funktion bleiben letztlich unbefriedigend.

1 Vgl. SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. B.34 f.

2 Ein weiterer, von WALD für den Fall $\theta \approx s$ entwickelter Ansatz kann hier aus zeitlichen Gründen nicht berücksichtigt werden, vgl. WALD, A., a.a.O., S. 173 ff.

3 Vgl. KEMP, K.W., a.a.O., S. 379 ff.; PAGE, E.S., a.a.O., S. 136 ff.; GHOSH, B.K., a.a.O., S. 205 ff.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 20 f. und die dort angegebene Literatur.

4 Vgl. z. B. die Näherungslösung von WALD zur Bestimmung von Grenzen für die ASN-Funktion bei Entnahme in Gruppen; vgl. WALD, A., a.a.O., S. 103 f.

3.6 Zusammenfassung und Ergebnis

Im vorliegenden dritten Kapitel dieser Arbeit sind, ausgehend von der von WALD gegebenen allgemeinen Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens, die Entscheidungsbereiche für alternative Stichprobenverteilungen und die wichtigsten Eigenschaften des Folgetestverfahrens nach WALD dargestellt und diskutiert worden. Im Folgetestverfahren nach WALD ist nach der Entnahme jedes einzelnen Stichprobenelementes eine Entscheidung darüber erforderlich, ob die Entnahme fortzusetzen oder die Nullhypothese H_0 anzunehmen oder zurückzuweisen ist. Die allgemeine Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens ist durch zwei kritische Werte A und B gekennzeichnet, die den Annahmehereich der H_0 , den Weiterprüfungsbereich und den Rückweisebereich der H_0 trennen.

Zur Bestimmung der kritischen Werte A und B gibt es, wie in Abschnitt 3.2 festzustellen war, zwei verschiedene Ansätze, die bislang in der Literatur fast ausschließlich verbreitete "approximative" Lösung, bei der die Gefahr einer Überschreitung der vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten besteht, und die "konservative" Lösung, die die Einhaltung der zulässigen Wahrscheinlichkeiten eines α - und eines β -Fehlers garantiert. Aus diesem Grunde, aber auch aus rechentechnischen Gründen war in dieser Arbeit der "konservativen" Lösung der Vorzug gegeben worden, und es ist zu wünschen, daß diese Lösung auch in der Prüfungspraxis die bislang übliche approximative Lösung ablösen wird.

Im Binomialmodell - die zu testenden Fehleranteile θ_0 und θ_A werden als "durchschnittliche" Fehleranteile interpretiert - kann die allgemeine Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens (Entscheidungsregel 1) sehr einfach in eine andere Entscheidungsregel umgeformt werden, in der die Bereichsgrenzen als parallele Geraden im (x,y)-Koordinatensystem dargestellt werden können. Auch hier sind zwei unterschiedliche Vorgehensweisen möglich: In der Literatur am

weitesten verbreitet ist der Vorschlag, die Bereichsgrenzen als Funktion des Stichprobenumfangs y anzugeben; die Entscheidung über Weiterprüfung oder Annahme bzw. Rückweisung der Nullhypothese ist durch Vergleich der bis zu einem bestimmten Stichprobenumfang (einschließlich) gefundenen Fehlerzahl x mit den für diesen Stichprobenumfang gültigen Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ zu treffen (Entscheidungsregel 2). Vom Rechen- bzw. Tabellieraufwand her gesehen dürfte es jedoch vorteilhafter sein, die Bereichsgrenzen als Funktion der Fehlerzahl x anzugeben; die Entscheidung über Weiterprüfung oder Annahme bzw. Rückweisung der H_0 wird durch Vergleich des aktuellen Stichprobenumfangs y mit den der gefundenen Fehlerzahl x entsprechenden Annahme- bzw. Rückweisekennzahlen $a(x)$ bzw. $r(x)$ getroffen (Entscheidungsregel 3). Diese drei Entscheidungsregeln sind sachlich gleichbedeutend, sie unterscheiden sich nur in der Auswertetechnik und im Arbeitsaufwand.

Im Modell der Hypergeometrischen Verteilung - die zu testenden Fehleranteile werden als "individuelle Fehleranteile eines konkreten Prüfungsfeldes interpretiert - ist eine exakte Bestimmung der Entscheidungsbereiche im (x,y) -Koordinatensystem höchstens iterativ möglich und so aufwendig, daß dieses Verfahren hier nicht empfohlen werden kann. Sinnvoll erscheint nur die approximative Bestimmung der Bereichsgrenzen. Von den oben vorgestellten vier Approximationslösungen hat sich als beste Lösung die Approximation nach CHUNG (Approximation 4) in Verbindung mit der Entscheidungsregel 3 erwiesen. Die in der Literatur meistens verwandte Binomialapproximation (Approximation 1) dürfte vermutlich die schlechteste dieser vier Approximationen sein; sie besitzt einen wesentlich breiteren Weiterprüfungsbereich und damit auch ceteris paribus einen wesentlich höheren (durchschnittlich) entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang als z. B. die Approximation nach CHUNG. Jedoch ist die übliche Binomialapproximation (Approximation 1) aller Voraussicht nach konservativ und somit wenigstens eine zulässige Lösung.¹

¹ Vgl. auch die Ausführungen auf Seite 35 f. dieser Arbeit.

Der Weiterprüfungsbereich ist im Modell der Binomialverteilung offen, während im Modell der Hypergeometrischen Verteilung, auch bei Verwendung der Approximation 1, immer eine Abbruchregel existiert. Gründe dafür, daß das Modell der Hypergeometrischen Verteilung in der Literatur bislang kaum beachtet worden ist, liegen offensichtlich in dem höheren Aufwand zur Berechnung der Bereichsgrenzen sowie in den Problemen zur Bestimmung der Eigenschaften eines Folgetests im Modell der Hypergeometrischen Verteilung. Der Aufwand zur Durchführung und Auswertung eines Folgetests ist jedoch im Modell der Hypergeometrischen Verteilung kaum größer als im Binomialmodell; die anwendbaren Auswertetechniken stimmen in beiden Modellen weitgehend überein.

Zur Auswertung eines Folgetests ist die grafische Stichprobenauswertung die anschaulichste Lösung, die jedoch einen relativ hohen Aufwand erfordert.¹ Schneller und sicherer dürfte die tabellarische Stichprobenauswertung sein. Wie hier dargestellt wurde, ist die in der Literatur übliche Praxis, die Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ für Gruppen von Stichprobenelementen zu tabellieren, nicht empfehlenswert, da hierdurch der (durchschnittlich) entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang stark erhöht und so die Vorteilhaftigkeit des Folgetestverfahrens gegenüber anderen Typen von Testverfahren stark eingeschränkt oder sogar völlig aufgehoben werden kann. Als beste Lösung wurde hier die Tabellierung der Annahme- und Rückweisekennzahlen $a(x)$ bzw. $r(x)$ für alternative Fehlerzahlen x empfohlen, die in jedem Fall - auch bei Modifikationen der Entscheidungsregel - einen minimalen Tabellenumfang bedingt. In Verbindung mit der konservativen Lösung, die eine beliebige Kombination von für bestimmte Fehlerwahrscheinlichkeiten von α bzw. β berechneten Rückweise- bzw. Annahmegrenzen gestattet, ist so erstmals eine sinnvolle Tabellierung einer größeren Anzahl von Folgetests für alternative Wahrscheinlichkeiten α und β möglich. Der Entwurf einer Sammlung von Tabellen der Annahme- und Rückweisekennzahlen von Folgetests dürfte vor allem im Modell

¹ Vgl. VANCE, NETER, a.a.O., S. 114.

der Hypergeometrischen Verteilung lohnend sein, da hier die Berechnung der Kennzahlen relativ aufwendig ist. Beispiele solcher Tabellen im Modell der Binomial- und der Hypergeometrischen Verteilung sind in Abschnitt 3.4 dieser Arbeit entwickelt worden.

Auch das Problem einer Abbruchregel im Binomialmodell wurde kurz angesprochen; dabei zeigte es sich, daß die in der Literatur übliche Abbruchregel schon durch eine einfache Überlegung deutlich verbessert werden konnte. Verfahren zur Bestimmung der zu einem vorgegebenen Test optimalen Abbruchregel sind dagegen erst in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit darzustellen.

Ansätze zur Bestimmung der Operationscharakteristik (Annahmekennlinie, OC-Funktion) und Kurve des durchschnittlichen Stichprobenumfangs (ASN-Funktion) eines Folgetests sind in Abschnitt 3.5 behandelt worden. Die in der Literatur üblicherweise verwendeten Näherungen für die OC-Funktion und für die ASN-Funktion erweisen sich beide als zu optimistisch, d. h. die errechneten Fehlerwahrscheinlichkeiten sind teilweise kleiner als die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten eines α - oder β -Fehlers, und die errechneten Werte der ASN-Funktion unterschätzen die tatsächlichen Werte der ASN-Funktion. Gründe für den Näherungscharakter sind, daß die kritischen Werte A und B nicht eindeutig bestimmt werden können und daß die möglichen Überschreitungen der Bereichsgrenzen kaum erfaßbar sind. Auch die hier angegebenen Grenzen für die OC- und für die ASN-Funktion erweisen sich als nur bedingt brauchbar, da sie vor allem für mittlere Fehleranteile sehr weit auseinander liegen. Bei eventuellen Modifikationen der Entscheidungsregel, z. B. durch Einführung einer Abbruchregel und/oder durch die Vereinbarung einer Entnahme in Gruppen nimmt die Aussagekraft der hier angegebenen Lösungsansätze noch weiter ab.

In der hier dargestellten Theorie bleiben auch weitere wichtige Fragen offen. So sind die hier hergeleiteten Näherungen nur in dem Fall gültig, daß aufeinanderfolgende Versuche unabhängig sind, sie gelten also nicht im Modell der Hypergeometrischen Verteilung. Diese Einschränkung ist jedoch nicht so schwerwiegend, da bei konservativer Lösung die Einhaltung der zulässigen Werte für α und β garantiert ist und als Obergrenze für die ASN-Funktion die ASN eines entsprechenden Tests im Binomialmodell verwendet werden kann. Zudem ist die Bedeutung der Hypergeometrischen Verteilung in der Praxis bislang noch gering; und deshalb soll in dieser Arbeit auch vorwiegend die Gültigkeit des Binomialmodells unterstellt werden.

Schwerwiegender dürfte sein, daß in der Theorie zum Folgetestverfahren nach WALD für die Verteilung des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs im allgemeinen nur relativ ungenaue Approximationen angegeben werden können.¹ Die Kenntnis der Verteilung des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs ist jedoch Voraussetzung für eine sinnvolle Zeit- und Kostenplanung des Wirtschaftsprüfers. Der durchschnittliche Stichprobenumfang allein ist für Zwecke der Prüfungsplanung kaum geeignet, denn daß "sich bei der Ausführung der Prüfung genau dieser Stichprobenumfang realisieren wird, ist selbstverständlich höchst unwahrscheinlich."² Als Grundlage einer Zeit- und Kostenplanung des Prüfers wird deshalb derjenige Stichprobenumfang empfohlen, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % nicht überschritten wird.³ Ein solcher Wert kann mit den bisher angesprochenen Lösungsansätzen nicht oder nur in grober Näherung bestimmt werden. Verfahren, mit denen unter bestimmten

1 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 191 ff. und S. 58 ff.; BHATE, D.H., Approximation to the Distribution of Sample Size for Sequential Tests, I. Tests of Simple Hypotheses. Biometrika 46 (1959), S. 130 ff.; WIJSMAN, R.A., Exponentially Bounded Stopping Time of Sequential Probability Ratio Tests for Composite Hypotheses, AMS 42 (1971), S. 1859 ff.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 21 f.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

2 LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 67.

3 Vgl. ebenda, S. 67 f.

Voraussetzungen ein solcher Grenzwert und auch die Werte der OC- und ASN-Funktion eines Folgetests exakt berechnet werden können, sind im folgenden vierten Kapitel dieser Arbeit darzustellen.

4. Weiterentwicklungen der Theorie zum Folgetestverfahren

4.1 Vorbemerkung

Aufgabe des vierten Kapitels dieser Arbeit soll die Entwicklung von Verfahren sein, mit denen die wichtigsten Eigenschaften eines vorgegebenen Folgetests besser als mit den in Abschnitt 3.5 behandelten Lösungsansätzen abgeschätzt oder unter bestimmten Voraussetzungen sogar exakt berechnet werden können. Dabei ist als erstes die Simulationstechnik zu nennen, die auch in der Literatur zum Folgetestverfahren relativ häufig zur Abschätzung der OC- und der ASN-Funktion benutzt wird.¹ Diese Technik wird oft auch Monte-Carlo-Methode genannt, die gefundenen Simulationsergebnisse werden als "empirische Ergebnisse" bezeichnet. Da jedoch in den meisten der hier genannten Literaturstellen Aussagen über die angewandte Simulationstechnik fehlen, soll in Abschnitt 4.2 ein Modell zur Simulation von Folgetests entworfen werden. Die Möglichkeiten und Grenzen dieser Technik sind anhand der auf Seite 40 dieser Arbeit eingeführten Beispiele zu diskutieren.

Daran anschließend ist in Abschnitt 4.3 ein Verfahren darzustellen, mit dem die Werte der OC- und der ASN-Funktion für einen geschlossenen Folgetest durch einen Rekursionsalgorithmus exakt bestimmt werden können. Dieses Verfahren ist in der Literatur zum Folgetestverfahren ebenfalls rela-

¹ Vgl. z. B. BAKER, A.G., Properties of some Tests in Sequential Analysis, Biometrika 37 (1950), S. 334 ff.; KRETSCHMER, F.-J., a.a.O., S. 43 ff.; BHATE, D.H., a.a.O., S. 130 ff.; COLTON, Theodore, McPHERSON, Klim, Two-Stage Plans Compared with Fixed-Sample-Size and Wald SPRT Plans, JASA 71 (1976), S. 80 ff.; FERBER, R., Statistical techniques in Market Research, New York, Toronto, London 1949, S. 225 ff.; AX, Johannes, Der Sequentielle Test als Hilfsmittel der Marktforschung, GFM-Mitteilungen zur Markt- und Absatzforschung, 14 (1968), S. 45 ff.; SCHNEIDERMAN, M.A., ARMITAGE, P., A Family of Closed Sequential Procedures, Biometrika 49 (1962), S. 41 ff.; sowie die jeweils dort angegebene Literatur.

tiv weit verbreitet; es wird von einigen Autoren als "direkte Methode", von anderen auch als "Rechnung mit Hilfe von Markov-Ketten" bezeichnet.¹ Diese letzte Bezeichnung ist jedoch, wie an anderer Stelle dieser Arbeit gezeigt werden soll, irreführend, so daß hier nur die Begriffe "Rekursionsverfahren" oder "direkte Methode" gleichbedeutend verwendet werden sollen. Dieses Rekursionsverfahren setzt geschlossene Bereichsgrenzen voraus, die man im Binomialmodell am einfachsten durch Vereinbarung einer Abbruchregel erhält.² Wie in dieser Arbeit gezeigt werden soll, eignet sich dieses Verfahren besonders zur Bestimmung einer optimalen Abbruchregel für einen Folgetest sowie zur Bestimmung von oberen Grenzen für den entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang, die vor allem für Zwecke der Prüfungsplanung wichtig sind.³ Als Vorgriff auf die in Abschnitt 4.3 darzustellenden Ergebnisse sei die Bemerkung gestattet, daß die in der Literatur vorgeschlagenen Abbruchkriterien (3.97) und (3.98) sich beide als nicht optimal erweisen.

1 Vgl. z. B. AROIAN, Leo A., Sequential Analysis, Direct Method, Technometrics 10 (1968), S. 125 ff.; ders., Applications of the Direct Method in Sequential Analysis, Technometrics 18 (1976), S. 301 ff.; ders., Moments of the Decisive Sample Number and of the Average Time to Termination of Sequential Tests. Communications in Statistics A5 (1976), S. 1041 ff.; CHOI, S.C., Truncated Sequential Designs for Clinical Trials based on MARKOV Chains, Biometrics 24 (1968), S. 159 ff.; CHOI, S.C., CLARK, V.A., Sequential Decision for a Binomial Parameter with Delayed Observations, Biometrics 26 (1970), S. 411 ff.; CORNELIUSSEN, A.H., LADD, D.W., On Sequential Tests of the Binomial Distribution, Technometrics 12 (1970), S. 635 ff.; KRETSCHMER, F.-J., a.a.O., S. 43 und S. 47 ff.; LEVENTHAL, B., Numerical Solutions to some Problems in Sequential Analysis, Ph.D. Thesis, London 1975; MAXIM, L.D., CULLEN, D.E., COOK, F.X.jr., Optimal Acceptance Sampling Plans for Auditing "Batched" Stop and Go vs. Conventional Single-Stage Attributes Plans. Accounting Review 51 (1976), S. 97 ff.

2 Vgl. die Ausführungen auf den Seiten 142 ff. dieser Arbeit.

3 Vgl. S. 182 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

In Abschnitt 4.4 schließlich soll gezeigt werden, wie auf der Grundlage der Theorie absorbierender Markov-Ketten die Werte der OC-, ASN- und VSN-Funktionen für bestimmte offene Folgetests mit Hilfe von Matrizenoperationen exakt ermittelt werden können. Mit Hilfe dieses in der Literatur bisher nicht bekannten Verfahrens können also die bei Verwendung der in Abschnitt 3.5 dieser Arbeit genannten Approximationsformeln auftretenden Fehler berechnet und eventuell besser geeignete Approximationsformeln gefunden werden. Eine Zusammenfassung der Vorzüge und Nachteile der einzelnen Verfahren sowie eine Diskussion möglicher Weiterentwicklungen soll in Abschnitt 4.5 gegeben werden.

In Anlehnung an die in der Literatur übliche Vorgehensweise soll auch hier bei der Darstellung der genannten Verfahren vor allem das Modell der Binomialverteilung zugrunde gelegt werden. Das Modell der Hypergeometrischen Verteilung kann in Abschnitt 4.4 gar nicht und in den Abschnitten 4.2 und 4.3 nur am Rande berücksichtigt werden. Abweichend von den meisten der hier aufgeführten Literaturstellen sollen in dieser Arbeit neben der OC- und der ASN-Funktion - soweit möglich - auch die Funktion der Varianz des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs (variance of sample number function, kurz: VSN-Funktion)

$$\text{VSN}(\theta) = \text{Var}(Y/\theta) \quad (4.1)$$

als Funktion des Fehleranteils θ der Grundgesamtheit (des Prüfungsfeldes) sowie die (bedingte) Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs

$$F(y) = F(y/\theta) \quad (y=1,2,\dots) \quad (0 \leq \theta \leq 1) \quad (4.2)$$

für einen vorgegebenen Fehleranteil θ bestimmt werden. Die Varianz ist ein Maß für die Streuung des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs, und die Verteilungsfunktion

$F(y) = F(y/\theta)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang (die Zufallsvariable) Y höchstens den Wert y annimmt¹, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Folgetest bis zu einem Stichprobenumfang y (einschließlich) mit der Annahme bzw. der Rückweisung der Nullhypothese beendet wird, wenn der Fehleranteil der Grundgesamtheit den Wert θ besitzt.

4.2 Abschätzung der Eigenschaften eines Folgetests durch Simulation

4.2.1 Vorbemerkung

Die Simulation ist, wie im vorhergehenden Abschnitt 4.1 dieser Arbeit festgestellt wurde, eine Methode zur Abschätzung der OC- und ASN-Funktion eines Folgetests. Unter Simulation soll dabei eine numerische Technik verstanden werden, die dort anwendbar ist, "wo mathematische Modelle wegen ihrer Komplexität nicht mehr analytisch lösbar sind".² Im allgemeinen bedeutet Simulation die Durchführung von Zufallsexperimenten unter kontrollierten Bedingungen zu einem mathematischen Modell, das dann "experimentell auf seine Eigenschaften hin untersucht wird",³ wobei die in diesem Modell enthaltenen Zufallsvariablen durch Zufallszahlen erfaßt werden.⁴ Weitere synonym verwandte Begriffe für Simulation sind "Monte-Carlo-Methode",⁵ "Methode der stocha-

1 Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 46 ff. und S. 40 f.

2 Vgl. BLEYMÜLLER, Josef, Simulation. Manuskript zur Vorlesung. Münster 1979, S. 1.

3 KÜCHER, D., MATT, G., OERTEL, C., SCHNEEWEISS, H., Einführung in die Simulationstechnik. DGOR-Schrift Nr. 5, Hrsg.: Dt. Gesellschaft für Operations Research, Frankfurt/M. 1972, S. 1.

4 Vgl. BLEYMÜLLER, J., a.a.O., S. 1 ff.

5 Vgl. SCHMITZ, Norbert, LEHMANN, Fritz, Monte-Carlo-Methoden I, Erzeugen und Testen von Zufallszahlen. Meisenheim am Glan 1976, S. 1; HAMMERSLEY, J.M., HANDSCOMB, D.C., Monte Carlo Methods. London, New York (reprinted) 1965.

stischen Versuche"¹ oder "Methode des Berechnungsexperimentes".² In dieser Arbeit soll, wie auch an anderer Stelle der Literatur, unter "Monte-Carlo-Methode" jedoch nur ein Teilgebiet der Simulation, nämlich die Technik der Zufallszahlenerzeugung verstanden werden.³

Das zu simulierende mathematische Modell ist in der vorliegenden Arbeit durch die Stichprobenvorschrift eines konkreten Folgetests und durch Annahmen über die Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe bestimmt.⁴ Wie bereits in Punkt 4.1 festgestellt wurde, soll hier zunächst Binomialverteilung der Fehlerzahl unterstellt werden. Da, wie in Punkt 2.4 dieser Arbeit gezeigt wurde, eine Vielzahl von Modifikationen der von WALD angegebenen Entscheidungsregel möglich sind, sollen im folgenden Punkt 4.2.2 zunächst die zu berücksichtigenden Verfahrenstypen und die Verfahren zur Bestimmung von Punktschätzwerten und Schätzintervallen zu den oben genannten vier Funktionen $OC(\theta)$, $ASN(\theta)$, $VSN(\theta)$ und $F(y/\theta)$ dargestellt werden. Anschließend ist in Punkt 4.2.3 ein mathematisches Modell zu konstruieren, das die Simulation von Zufallswegen der hier angegebenen Typen von Folgetests gestattet.⁵ Da zuverlässige Schätzungen nur bei einer relativ großen Anzahl von Simulationsläufen zu einem vorgegebenen Fehleranteil θ der Grundgesamtheit möglich sind, empfiehlt es sich, eine solche Simulation mit Hilfe eines Computers durchzuführen; dabei können die Formeln zur Berechnung von Schätzwerten bzw. Konfidenzintervallen vorteilhaft mit in das Computerprogramm integriert werden.

1 Vgl. SCHMITZ, LEHMANN, a.a.O., S. 1.

2 Vgl. KOLLER, Horst, Simulation und Planspieltechnik. Berechnungsexperimente in der Betriebswirtschaft. Wiesbaden 1969, S. 15.

3 Vgl. MEIER, Robert C., NEWELL, William T., PAZER, Harold L., Simulation in Business and Economics. Englewood Cliffs, New Jersey 1969, S. 3.

4 Vgl. die Ausführungen auf S. 32 ff. dieser Arbeit.

5 Zu den Phasen eines Simulationsexperimentes vgl. MERTENS, Peter, Simulation, Stuttgart 1969, S. 10.

In Punkt 4.2.4 schließlich sollen die für das gewählte Beispiel erhaltenen Simulationsergebnisse grafisch und tabellarisch dargestellt und mit den in Abschnitt 3.5 gefundenen Näherungslösungen verglichen werden. Eine Beurteilung der Eignung der Simulationstechnik zur Bestimmung der Eigenschaften eines vorgegebenen Folgetests bildet den Abschluß des Abschnitts 4.2.

4.2.2 Aufgabenstellung einer Simulation von Folgetests

Um die Leistungsfähigkeit der Simulation zu verdeutlichen, soll hier ein Simulationsmodell entwickelt werden, das sämtliche der in Abschnitt 2.4 genannten Modifikationen der Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens erfassen kann. So soll wahlweise Einzelentnahme oder Gruppenentnahme mit einem beliebigen Gruppenumfang n_d unterstellt werden können, wobei als Mischform auch eine Gruppenauswertung mit vorzeitigem Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze (nach dem Prinzip des "curtailed sampling") zugelassen werden soll. Weiterhin soll das Simulationsmodell auch die Vorgabe beliebiger Abbruchregeln¹ gestatten. Mit einem solchen Modell können die Eigenschaften eines Folgetests in der von WALD entwickelten Form sowie auch die Eigenschaften modifizierter Folgetests abgeschätzt und die Ergebnisse miteinander verglichen werden.

Als Ergebnisse der Simulation sollen für die in Abschnitt 4.1 genannten Funktionen $OC(\theta)$, $ASN(\theta)$, $VSN(\theta)$ und $F(y/\theta)$ Punktschätzwerte - wobei nur erwartungstreue (unverzerrte) Schätzfunktionen verwendet werden sollen - und zusätzlich - soweit sinnvoll möglich - Konfidenzintervalle (Schätzintervalle, Vertrauensbereiche) bestimmt werden, um so Aussagen über die Genauigkeit der Schätzungem machen zu kön-

¹ Vgl. S. 142 ff. dieser Arbeit.

nen.¹ Die Zahl der Versuche zu einem bestimmten Folgetest und einem vorgegebenen Anteilswert θ soll mit m und der Anteil der Versuche, die mit einer Annahme der Nullhypothese enden, mit q bezeichnet werden. Wenn vorausgesetzt wird, daß ein Versuch solange fortgesetzt wird, bis eine Entscheidung für Annahme oder für Rückweisung der Nullhypothese getroffen wird, ergibt sich als Anteil der Versuche, die mit einer Rückweisung der Nullhypothese enden, $1-q$. Der beim l -ten Versuch beobachtete entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang wird y_1 ($l=1,2,\dots,m$) genannt.

Bei Verwendung der oben definierten Symbole findet man

$$\hat{OC}(\theta) = q \quad (0 \leq q \leq 1), \quad (4.3)$$

$$\hat{ASN}(\theta) = \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m y_l ; \quad (4.4)$$

und

$$\hat{VSN}(\theta) = S_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m (y_l - \bar{y})^2 \quad (4.5)$$

¹ Vgl. zu den folgenden Ausführungen z.B. BAMBERG, Günter, BAUR, Franz, Statistik, München, Wien 1980, S. 147 ff.; BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 85 ff.; HARNETT, Donald L., MURPHY, James L., Introductory Statistical Analysis, Reading (Mass.), Menlo Park (Calif.) u.a. 1975, S. 246 ff.; MENDENHALL, William, REINMUTH, James E., Statistics for Management and Economics (3rd ed.), North Scituate (Mass.) 1978, S. 221 ff.; OTT, Lyman, An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis, North Scituate (Mass.) 1977, S. 70 ff.; ROMANO, Albert, Applied Statistics for Science and Industry, Boston, London, Sydney, Toronto, 1977, S. 8 ff.; SCHAICH, Eberhard, a.a.O., S. 163 ff.; SCHAICH, E., KÖHLE, D., SCHWEITZER, W., WEGNER, F., Statistik II für Volkswirte, Betriebswirte und Soziologen, München 1975, S. 42 ff.; STEVENSON, William J., Business Statistics, Concepts and Applications, New York, Hagerstown, San Francisco, London 1978, S. 201 ff.; WETZEL, W., a.a.O., S. 146 ff.; WONNACOTT, Thomas H., WONNACOTT, Ronald J., Introductory Statistics for Business and Economics (2nd ed.), Santa Barbara, New York, London, Sydney, Toronto 1977, S. 179 ff.

als Punktschätzwerte für die OC-, ASN- und VSN-Funktion zu einem vorgegebenen Fehleranteil θ der Grundgesamtheit.¹ Als Schätzwert $OC(\theta)$ verwendet man den Anteil der mit einer Annahme der H_0 endenden Versuche an der Gesamtzahl m der Versuche zu einem vorgegebenen Fehleranteil θ in der Grundgesamtheit (im Prüfungsfeld). Schätzwerte für die ASN- bzw. VSN-Funktion sind das "Stichprobenmittel" und die "Stichprobenvarianz" von Y , wobei als "Stichprobe" hier die Durchführung von m Simulationsversuchen verstanden wird. Als Punktschätzwerte für die Werte der Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ ($y=1,2,\dots$) erhält man in einem konkreten Simulationsexperiment die Werte der beobachteten Verteilungsfunktion (empirische Verteilungsfunktion, empirische Summenhäufigkeitsfunktion) $F^0(y/\theta)$ ($y=1,2,\dots$); es gilt also²

$$\hat{f}(y/\theta) = F^0(y/\theta) \quad (y=1,2,\dots) \quad (4.6)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Zahl m der Versuche genügend groß ist, kann unter Vernachlässigung der sogenannten Stetigkeitskorrektur³ ein Konfidenzintervall für $OC(\theta)$ als

$$q - z\sqrt{\frac{q(1-q)}{m}} \leq OC(\theta) \leq q + z\sqrt{\frac{q(1-q)}{m}} \quad (4.7)$$

bestimmt werden.⁴ Dabei ist z der dem gewählten Sicherheitsgrad (Konfidenzniveau) entsprechende kritische Wert der Standardnormalverteilung bei zweiseitiger Fragestellung.

1 Vgl. z. B. BAMBERG, BAUR, a.a.O., S. 139 f.; BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 96 f.; WETZEL, W., a.a.O., S. 147 ff.; WONNACOTT, WONNACOTT, a.a.O., S. 180 ff.

2 Vgl. MOOD, GRAYBILL, BOES, a.a.O., S. 506 ff. und S. 264 f. Zum Begriff und zur Berechnung der empirischen Verteilungsfunktion vgl. z. B. auch BAMBERG, BAUR, a.a.O., S. 15 f.; BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 8 ff.; KREYSZIG, Erwin, Statistische Methoden und ihre Anwendungen (6. Aufl.), Göttingen 1977, S. 33 ff.

3 Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 65 und S. 75; ROMANO, A., a.a.O., S. 31.

4 Vgl. z. B. YAMANE, Taro, Statistik. Ein einführendes Lehrbuch (Dt. Übersetzung von H.-J. ZUBROD), Band 2, Frankfurt/M. 1976, S. 615 f.; MENDENHALL, REINMUTH, a.a.O., S. 244 f.; WONNACOTT, WONNACOTT, a.a.O., S. 223 f.; HARNETT, MURPHY, a.a.O., S. 264 ff.; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 34 ff.; WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 101 ff.

Bei einem Sicherheitsgrad von 95 %, der den folgenden Berechnungen zugrunde gelegt werden soll, erhält man aus einer Tabelle der Standardnormalverteilung den Wert $z = 1,960$.

Die sogenannte Endlichkeitskorrektur (Korrekturfaktor für endliche Gesamtheiten)¹ ist hier - wie auch bei den im folgenden darzustellenden Konfidenzintervallen - vernachlässigbar, da die Ergebnisse aufeinanderfolgender Versuche als unabhängig betrachtet werden können.²

Das durch (4.7) gegebene Schätzintervall, das in Anlehnung an STROBEL auch als "zentrales" Konfidenzintervall bezeichnet werden soll,³ liefert jedoch vor allem für sehr große oder sehr kleine Anteile der mit einer Annahme der H_0 endenden Versuche - diese Anteile treten auf, wenn relativ kleine oder relativ große Werte für den Fehleranteil θ im Prüfungsfeld unterstellt werden - teilweise fehlerhafte Ergebnisse. So besteht die Möglichkeit, daß Untergrenzen kleiner als Null oder Obergrenzen größer als Eins errechnet werden.

Ein besser geeignetes Konfidenzintervall für $OC(\theta)$ liefert

$$OC_1 \leq OC(\theta) \leq OC_2, \quad (4.8)$$

wobei die Grenzen als Lösungen der Bestimmungsgleichungen

$$q = OC_1 + z \sqrt{\frac{OC_1 (1-OC_1)}{m}} \quad (4.9)$$

und

$$q = OC_2 - z \sqrt{\frac{OC_2 (1-OC_2)}{m}} \quad (4.10)$$

1 Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 74.

2 Diese Bedingung ist bei der Verwendung von Zufallszahlengeneratoren streng genommen nicht erfüllt, da aufeinanderfolgende Zahlen durch einen bestimmten Algorithmus miteinander verknüpft sind. Diese Algorithmen werden jedoch so gewählt, daß die erzeugten Zufallszahlen für praktische Erfordernisse als unabhängig gelten können.

3 Vgl. STROBEL, Wilhelm, Die Bedeutung mathematischer Stichprobenanalysen für die Praxis von Jahresabschlußprüfungen, WpG 26 (1973), S. 488 ff.

gegeben sind.¹ Diese Gleichungen lassen sich zu einer quadratischen Gleichung

$$OC_{1,2}^2 \cdot (m+z^2) - OC_{1,2} \cdot (2mq+z^2) + mq^2 = 0$$

zusammenfassen, deren Lösungen

$$OC_{1,2} = \frac{2mq+z^2}{2(m+z^2)} \pm z \frac{\sqrt{4mq(1-q)+z^2}}{2(m+z^2)} \quad (4.11)$$

lauten. Auf eine Darstellung der Herleitung sei hier verzichtet, da sie z. B. - unter zusätzlicher Berücksichtigung einer Stetigkeitskorrektur - bei SCHAICH, KÖHLE, SCHWEITZER und WEGNER abgedruckt ist. Eine iterative Berechnung dieser Intervallgrenzen, wie sie von PAUL vorgeschlagen wird, erscheint als nicht zweckmäßig, da sie bei hohen Anforderungen an die Genauigkeit eine große Zahl von Iterationsschritten erfordert.²

Das Stichprobenmittel, dessen konkrete Ausprägung durch die Gleichung (4.4) gegeben ist, ist bei genügend großer Zahl m der Simulationsversuche nach dem Zentralen Grenzwertsatz annähernd normalverteilt; die Voraussetzungen des Zentralen Grenzwertsatzes (endlicher Erwartungswert und endliche Varianz der Zufallsvariablen Y) sind, wie noch zu zeigen sein wird, erfüllt.³ Ein Konfidenzintervall für $ASN(\theta)$ kann deshalb in guter Näherung als

1 Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem ANDERSON, Oskar, Zum Problem der Wahrscheinlichkeit a posteriori in der Statistik, Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik 83 (1947), S. 500, wiederabgedruckt in ANDERSON, Oskar, Ausgewählte Schriften, Band 2 (Hrsg. von KELLERER, H. u. a.), Tübingen 1963, S. 694; SCHAICH, E., a.a.O., S. 178; SCHAICH, KÖHLE, SCHWEITZER, WEGNER, a.a.O., S. 64 ff.; STROBEL, W., a.a.O., S. 488 f.; YAMANE, T., a.a.O., S. 618 f.; KREYSZIG, E., a.a.O., S. 198 f.

2 Vgl. PAUL, Henning, Zur Anwendung binomialverteilter Stichproben bei Unternehmensprüfungen. ZfB 44 (1974), S. 114 ff.

3 Zum Zentralen Grenzwertsatz vgl. z. B. BAMBERG, BAUR, a.a.O., S. 130 f.; BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 78; ROMANO, A., a.a.O., S. 14 f.; FISZ, M., a.a.O., S. 234 ff.; sowie die dort angegebene Literatur.

$$\bar{y} - z \frac{s_Y}{\sqrt{m}} \leq \text{ASN}(\theta) \leq \bar{y} + z \frac{s_Y}{\sqrt{m}}, \quad (4.12)$$

berechnet werden, wobei z den kritischen Wert der Standardnormalverteilung und s_Y die durch Gleichung (4.5) bestimmte Stichprobenstandardabweichung bezeichnet. Diese Näherung wird im allgemeinen dann als genügend genau angesehen, wenn die Zahl der Versuche größer als 30 ist.¹

Für eine vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit, die hier, um Verwechslungen mit dem Fehler erster Art (α -Fehler) zu vermeiden, als $1-\gamma$ bezeichnet werden soll, könnte ein Konfidenzintervall für $\text{VSN}(\theta)$ mit Hilfe der kritischen Werte der Chi-Quadrat-Verteilung als

$$\frac{(m-1) \cdot s_Y^2}{\chi^2_{1-\frac{\gamma}{2}; m-1}} \leq \text{VSN}(\theta) \leq \frac{(m-1) \cdot s_Y^2}{\chi^2_{\frac{\gamma}{2}; m-1}} \quad (4.13)$$

bestimmt werden.² Voraussetzung hierfür ist jedoch, daß die Zufallsvariable Y , also der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang beim Folgetest, exakt oder wenigstens annähernd normalverteilt ist. Diese Voraussetzung ist jedoch, wie aus den in Punkt 4.2.4 darzustellenden Simulationsergebnissen entnommen werden kann, im allgemeinen nicht gegeben, so daß hier auf die Angabe von Konfidenzintervallen für $\text{VSN}(\theta)$ verzichtet werden soll. Das Fehlen von Konfidenzintervallen für die Varianz schränkt den Aussagegehalt von Simulationsexperimenten kaum ein, da die VSN -

¹ Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 86 ff.; BOOK, Stephen A., Statistics, Basic Techniques for Solving Applied Problems, New York, St. Louis, ..., Düsseldorf, u. a. 1977, S. 104 ff.; OTT, L., a.a.O., S. 75 f.; HARNETT, MURPHY, a.a.O., S. 261 f.; ROMANO, A., a.a.O., S. 14 ff.

² Vgl. z. B. BAMBERG, BAUR, a.a.O., S. 168 ff.; BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 88 ff. und S. 95; HARNETT, MURPHY, a.a.O., S. 270 ff.; ROMANO, A., a.a.O., S. 37 ff.; SCHAICH, E., a.a.O., S. 176 f.

Funktion nicht so anschaulich wie die OC- und die ASN-Funktion interpretiert werden kann und hier auch zur Bestimmung von Obergrenzen für den entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang¹ nicht verwendet werden kann; solche Obergrenzen erhält man besser direkt aus der geschätzten Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$.

Konfidenzintervalle für die Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs der Grundgesamtheit könnten mit Hilfe des kritischen Wertes $d_{1-\gamma;m}$ für die Prüfgröße des Kolmogorov-Smirnov-Tests (Einstichprobentest) als

$$F^0(y/\theta) - d_{1-\gamma;m} \leq F(y/\theta) \leq F^0(y/\theta) + d_{1-\gamma;m} \quad (y=1,2,\dots) \quad (4.14)$$

bestimmt werden, wobei der kritische Wert $d_c = d_{1-\gamma;m}$ durch die Beziehung

$$W(\max_y |F(y/\theta) - F^0(y/\theta)| \leq d_c) = 1-\gamma \quad (4.15)$$

gegeben ist.² Die kritischen Werte zu ausgewählten Sicherheitswahrscheinlichkeiten $1-\gamma$ sind für kleine Versuchszahlen m tabelliert, für große Werte von m (Faustregel $m > 40$) können sie mit Hilfe von Näherungsformeln bestimmt werden.³ Im Falle $1-\gamma = 0,95$ findet man beispielsweise

$$d_{0,95;m} \approx \frac{1,36}{\sqrt{m}} \quad (4.16)$$

1 Vgl. die Ausführungen auf Seite 185 f. dieser Arbeit.

2 Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem MOOD, GRAYBILL, BOES, a.a.O., S. 511; WILKS, S.S., a.a.O., S. 365 ff.; zum Kolmogorov-Smirnov-Test vgl. auch BLEY-MÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 129 ff.; BLEYMÜLLER, GEHLERT, a.a.O., S. 45 und S. 145; KREYSZIG, E., a.a.O., S. 234 ff. und S. 434; ROMANO, A., a.a.O., S. 187 ff.; SCHAICH, E., a.a.O., S. 219 f.

3 Vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, a.a.O., S. 144 und die dort angegebene Literatur.

als Näherung für den gesuchten kritischen Wert d_c . Unter zusätzlicher Berücksichtigung der Tatsache, daß die Verteilungsfunktion nur Werte im Intervall $[0; 1]$ annehmen kann, findet man als 95%-Konfidenzintervall für die Verteilungsfunktion¹

$$\max \left\{ 0; F^0(y/\theta) - \frac{1,36}{\sqrt{m}} \right\} \leq F(y/\theta) \leq \min \left\{ 1; F^0(y/\theta) + \frac{1,36}{\sqrt{m}} \right\}$$

$$(y=1,2,\dots) . \quad (4.17)$$

Voraussetzung des Kolmogorov-Smirnov-Tests und des hier angegebenen Intervallschätzverfahrens ist jedoch, daß die Verteilungsfunktion $F(y) = F(y/\theta)$ stetig ist.² Diese Voraussetzung ist jedoch, wie in Punkt 4.2.4 oder in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit zu zeigen sein wird, nicht erfüllt, denn die Verteilungsfunktion $F(y)$ weist, vor allem bei kleinen Werten für den angenommenen Fehleranteil θ des Prüfungsfeldes, große Sprünge auf. Deshalb soll hier, wenn auch die Anwendung des Kolmogorov-Smirnov-Tests im Falle diskreter Verteilungen in der Literatur manchmal als zulässig erachtet wird³, auf die Bestimmung von Konfidenzintervallen für $F(y/\theta)$ verzichtet werden.

Alle hier zu berücksichtigenden Punkt- und Intervallschätzverfahren sind programmierbar und eignen sich deshalb vor allem für die Durchführung und Auswertung von Simulationsexperimenten zu einem Folgetest mit Hilfe eines Computers. Das eigentliche Simulationsmodell, das im folgenden Punkt 4.2.3 dieser Arbeit darzustellen ist, und die hier genannten Formeln zur Berechnung von Schätzwerten bzw. Intervallgrenzen können problemlos in einem einzigen Computerprogramm zusammengefaßt werden. Bei der Anwendung eines solchen Simulationsprogramms ist lediglich zu beachten, daß die Zahl der

1 Vgl. MOOD, GRAYBILL, BOES, a.a.O., S. 511.

2 Vgl. ebenda, S. 508 ff.; KREYSZIG, E., a.a.O., S. 234; SCHAICH, E., a.a.O., S. 219.

3 Vgl. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 131.

Versuche zu einem bestimmten Folgetest und einem vorgegebenen Fehleranteil θ nicht zu klein sein darf, weil sonst die hier angegebenen Konfidenzintervalle für $OC(\theta)$ bzw. $ASN(\theta)$ nicht mehr gültig sind.

4.2.3 Entwurf und Auslegung eines Simulationsexperimentes

Zur Simulation einer Zufallsentnahme aus einer dichtotomen Grundgesamtheit im Binomialmodell sind zwei grundsätzlich verschiedene Vorgehensweisen denkbar, die als Methode der fixen und Methode der variablen Inkremente bezeichnet werden.¹ Bei der Methode der fixen Inkremente wird für vorgegebene und im Zeitablauf konstante Intervalle simuliert, was für ein Ereignis eingetreten ist. Bei der Simulation eines Folgetests bedeutet dies im allgemeinen, daß für jedes Stichprobenelement $y=1,2,\dots$ festzustellen ist, ob dieses Element fehlerhaft oder fehlerfrei ist. Dazu ist zu jedem Stichprobenelement $y=1,2,\dots$ die Ausprägung einer Zufallsgröße zu bestimmen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von θ den Wert Eins und mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\theta$ den Wert Null besitzt. Die Methode der fixen Inkremente ist auch dann anwendbar, wenn ein Folgetest mit Gruppenentnahme, bei dem ein vorzeitiger Abbruch nicht zugelassen wird, simuliert werden soll. In diesem Fall ist für jedes ganzzahlige Vielfache des Gruppenumfangs $y=n_d, 2n_d, 3n_d, \dots$ die Anzahl der in der entsprechenden Gruppen gefundenen Fehler festzustellen; dazu sind die Ausprägungen einer Zufallsgröße zu bestimmen, die binomialverteilt mit den Parametern n_d und θ ist.

Die Methode der variablen Inkremente besteht hingegen darin, daß der "Abstand" bis zum Auftreten des nächsten Ereignisses bestimmt wird. In diesem Fall bedeutet das also, daß jeweils die Anzahl der Elemente bis zum Auftreten des ersten fehlerhaften Elementes (einschließlich) zu simulieren ist. Diese

¹ Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem MERTENS, P., a.a.O., S. 19 ff. und die dort angegebene Literatur.

Zahl ist im Binomialmodell geometrisch verteilt.¹ Zur Simulation eines Zufallsweges im Modell der Binomialverteilung nach der Methode der variablen Inkremente sind also die Ausprägungen einer mit dem Parameter θ geometrisch verteilten Zufallsgröße zu bestimmen.

Bevor auf die Möglichkeiten der Bestimmung einer Zufallsgröße mit den gewünschten Eigenschaften eingegangen werden soll, sind zunächst die Vor- und Nachteile der hier dargestellten Methoden zu diskutieren. Die "Methode variabler Inkremente [ist dann] im Vorteil, wenn die Ereignisse sehr unregelmäßig eintreffen und die sich daran anschließenden Aktionen lange dauern".² Dagegen ist die Methode fixer Inkremente vorteilhaft, wenn die simulierten Ereignisse in regelmäßigen Abständen eintreffen; diese Methode ist sehr ungünstig, wenn zwischen den Ereignissen lange Intervalle liegen, in denen nichts geschieht.³ Zur Beschreibung eines Zufallsweges im Binomialmodell würde, wenn man zunächst von der Existenz einer Entscheidungsregel einmal absieht, die Angabe derjenigen Punkte $P(x;y)$ genügen, bei denen ein fehlerhaftes Stichprobenelement auftritt. Die Abstände zwischen diesen Punkten werden, da hier nur Prüfungen betrachtet werden, die durch relativ kleine Fehleranteile θ des Prüfungsfeldes gekennzeichnet sind, mehr oder weniger groß sein; der durchschnittliche Abstand, das ist der Erwartungswert der Geometrischen Verteilung, beträgt $1/\theta$.⁴ Bei einem Fehleranteil von $\theta = 0,01$ wird also im Durchschnitt nach jeweils 100, bei einem Fehleranteil von $\theta = 0,05$ nach jeweils

1 Die geometrische Verteilung ist ein Spezialfall der Negativen Binomialverteilung; vgl. S. 51 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur; vgl. auch HASTINGS, PEACOCK, a.a.O., S. 74 ff.; NAYLOR, T.H., BALINTFY, J.L., BURDICK, D.S., CHU, K., Computer Simulation Techniques, New York, London, Sydney 1966, S. 102 ff.

2 MERTENS, P., a.a.O., S. 21.

3 Vgl. ebenda, S. 21 f.

4 Zu den Eigenschaften der Geometrischen Verteilung vgl. z. B. HASTINGS, PEACOCK, a.a.O., S. 76; NAYLOR, BALINTFY, BURDICK, CHU, a.a.O., S. 102 ff.

20 Stichprobenelementen (einschließlich) ein Fehler auftreten. Da außerdem geometrisch verteilte Zufallsgrößen relativ einfach bestimmt werden können - dies soll im Anschluß an die folgenden Ausführungen gezeigt werden - erscheint hier die Methode der variablen Inkremente zur Simulation eines Zufallsweges im Binomialmodell als wesentlich vorteilhafter als die Methode der fixen Inkremente.

Zu klären bleibt, wie bei einer Simulation nach der Methode der variablen Inkremente die Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens sinnvoll berücksichtigt werden kann. Zunächst soll hier unterstellt werden, daß die Elemente einzeln entnommen und einzeln ausgewertet werden; im Anschluß daran sind die Simulationstechniken bei möglichen Modifikationen dieser Entscheidungsregel zu diskutieren.

Die Methode der fixen Inkremente entspricht exakt dem Vorgehen des Prüfers: Nach jeder (simulierten) Entnahme ($y=1,2,\dots$) ist eine Entscheidung darüber zu treffen, ob die Entnahme fortzusetzen ist oder ob die Nullhypothese angenommen oder zurückgewiesen werden kann. Grundsätzlich ist dabei jede der im dritten Kapitel dieser Arbeit angegebenen Entscheidungsregeln anwendbar. Die Entscheidungsregel 2 (3.34), die nach jeder Entnahme den Vergleich der simulierten Gesamtzahl der Fehler in der Stichprobe mit den entsprechenden Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ und $d(y)$ erfordert, dürfte jedoch die dem allgemeinen Vorgehen des Prüfers wie auch der Methode der fixen Inkremente am besten entsprechende Entscheidungsregel sein. Wenn eine Stichprobe vom Umfang y simuliert wird, muß diese Entscheidungsregel also insgesamt y mal durchlaufen werden.

Bei einer Simulation nach der Methode der variablen Inkremente ist, wie im folgenden gezeigt werden soll, eine schrittweise (inkrementelle) Anwendung der sequentiellen Entscheidungsregel zwar grundsätzlich möglich, aber nicht optimal. Die beim i -ten Schritt simulierte Zahl der Elemente

bis zum Auftreten eines fehlerhaften Elementes (einschließlich) soll hier mit y'_i ($i=1,2,\dots,x$) und der bis zum Auftreten des x -ten Fehlers (einschließlich) simulierte Gesamtstichprobenumfang mit y' bezeichnet werden, wobei also

$$y' = \sum_{i=1}^x y'_i \quad (4.18)$$

gilt. Wenn unterstellt wird, daß der Punkt $P(x; y')$ im Weiterprüfungsbereich liegt und eine Fortsetzung der Entnahme erforderlich macht, werden im $i+1$ -ten Simulationsschritt y'_{i+1} weitere Punkte des Zufallsweges

$$P(x; y'+1), P(x; y'+2), \dots, P(x; y'+y'_{i+1}-1), P(x+1; y'+y'_{i+1}) \quad (4.19)$$

bestimmt. Um festzustellen, ob dieser hier vorgegebene Teil des Zufallsweges vollständig innerhalb des Weiterprüfungsbereiches verläuft oder ob dieser Zufallsweg den Annahme- oder Rückweisebereich der H_0 erreicht, könnte für jeden der durch (4.19) angegebenen Punkte eine der im dritten Kapitel angegebenen Entscheidungsregeln angewandt werden; der Aufwand zur Entscheidungsfindung wäre gleich hoch wie im Verfahren der fixen Inkremente. Der Aufwand kann jedoch, wie an der folgenden Abbildung 4.1 verdeutlicht werden soll, durch Einführung einer anderen Entscheidungsregel erheblich gesenkt werden.

In der Abbildung 4.1 sind drei mögliche Zufallswege eines Folgetests von einem Punkt $P(x; y')$ im Weiterprüfungsbereich dargestellt, von denen einer vollständig im Weiterprüfungsbereich verbleibt, einer den Annahmebereich der H_0 und einen den Rückweisebereich der H_0 erreicht. Eine Überprüfung nur des letzten Punktes des Zufallsweges reicht, wie man sieht, nicht aus, da hierdurch Zufallswege, die zunächst in den Annahmebereich der H_0 eindringen, deren letzter Punkt je-

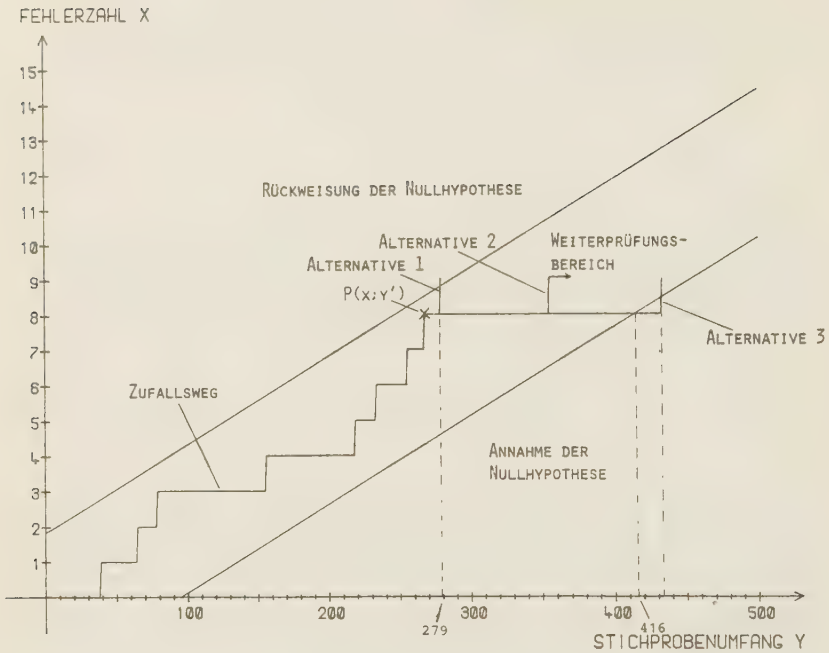


Abb. 4.1: Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei der Simulation eines Folgetests

doch wieder im Weiterprüfungsbereich liegt, nicht erfaßt würden. Wenn die Bereichsgrenzen des betrachteten Folgetests jedoch die Bedingungen

$$c(y) \leq c(y+1) \quad (y=1,2,\dots) \quad (4.20)$$

und

$$d(y) \leq d(y+1) \quad (y=1,2,\dots) \quad (4.21)$$

erfüllen - fallende Bereichsgrenzen werden dadurch ausgeschlossen -, kann die im folgenden angegebene Entscheidungsregel verwendet werden:

- Die (simulierte) Entnahme ist fortzusetzen, wenn der vorletzte und der letzte Punkt des (simulierten) Zufallsweges innerhalb des Weiterprüfungsbereiches liegen;
- die Nullhypothese ist anzunehmen, wenn der vorletzte oder der letzte Punkt des (simulierten) Zufallsweges im Annahmebereich der Nullhypothese liegt;
- die Nullhypothese ist zurückzuweisen, wenn der letzte Punkt des (simulierten) Zufallsweges im Rückweisebereich der Nullhypothese liegt.

Als entscheidungsnotwendiger Stichprobenumfang im Falle einer Rückweisung der Nullhypothese gilt der simulierte Stichprobenumfang

$$y' + y'_{i+1} = \sum_{i=1}^{x+1} y'_i, \quad (4.22)$$

als entscheidungsnotwendiger Stichprobenumfang im Falle einer Annahme der Nullhypothese gilt der Stichprobenumfang, bei dem der (simulierte) Zufallsweg erstmals den Weiterprüfungsbereich verläßt; dieser Stichprobenumfang ist durch den Wert der Annahmekennzahl $a(x)$ des simulierten Folgetests gegeben.¹

Da die Kenntnis der Annahmekennzahlen $a(x)$ ($x=0,1,\dots$) des betrachteten Folgetests vorausgesetzt wird, um den entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang bei Annahme der H_0 im $(x+1)$ -ten Simulationsschritt bestimmen zu können, empfiehlt es sich, die Zuordnung des jeweils letzten und vorletzten Punktes des (simulierten) Zufallsweges zu einem der drei Entscheidungsbereiche des Folgetests anhand der Entscheidungsregel 3 (3.50) vorzunehmen. Die oben definierte Entscheidungsregel, die auch mit "Entscheidungsregel 4" bezeichnet werden soll, lautet dann in Kurzschreibweise

¹ Vgl. S. 100 ff. dieser Arbeit.

- Annahme der H_0 , wenn $y' + y'_{i+1} - 1 \geq a(x)$
oder $y' + y'_{i+1} \geq a(x+1)$,
- Rückweisung der H_0 , wenn $y' + y'_{i+1} \leq r(x+1)$, (4.23)
- Weiterprüfung sonst.

Diese Entscheidungsregel kann, wie im folgenden zu zeigen sein wird, nicht nur zur Simulation von Folgetests mit Einzelauswertung, sondern auch für Folgetests verwendet werden, deren Bereichsgrenzen z. B. durch die Vereinbarung einer gruppenweisen Auswertung der Stichprobe und/oder durch die Vereinbarung einer Abbruchregel modifiziert sind.

Der Einfluß einer Auswertung der Stichprobe in Gruppen von jeweils n_d Stichprobenelementen kann, wie bereits erwähnt wurde, dadurch berücksichtigt werden, daß die Annahmekennzahlen $a(x)$ auf das nächstgrößere ganzzahlige Vielfache der Gruppengröße aufgerundet und die Rückweisekennzahlen $r(x)$ auf das nächstkleinere ganzzahlige Vielfache der Gruppengröße abgerundet werden.¹ Die Entscheidungsregel (4.23) gilt bei Verwendung der entsprechend gerundeten Kennzahlen $a(x)$ und $r(x)$ ($x=0,1,\dots$) unverändert. Als entscheidungsnotwendiger Stichprobenumfang ergibt sich bei Rückweisung der Nullhypothese, wenn ein vorzeitiger Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze zugelassen wird, der durch Gleichung (4.22) bestimmte simulierte Stichprobenumfang. Wenn ein vorzeitiger Abbruch nicht zugelassen ist, ist dieser Wert auf das nächstgrößere ganzzahlige Vielfache von n_d aufzurunden. Der so gefundene (simulierte) Stichprobenumfang kann höchstens gleich der abgerundeten Rückweisekennzahl $r(x)$ sein. Der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang im Falle einer Annahme der H_0 ist durch die (aufgerundete) Annahmekennzahl $a(x)$ bestimmt. Mögliche Zufallswege bei der Simulation eines Folgetests mit Gruppenauswertung nach dem Verfahren der variablen Inkremente sind in der Abbildung 4.2 grafisch dargestellt.

¹ Vgl. S. 132 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

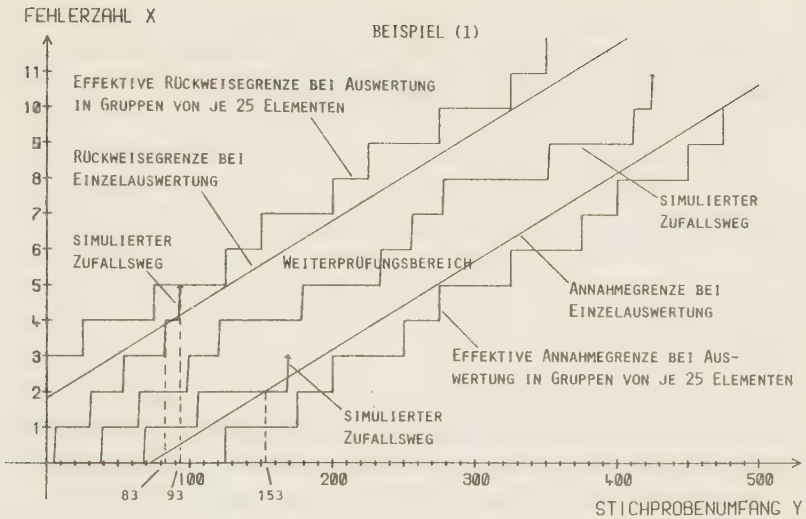


Abb. 4.2: Entscheidungsbereiche und mögliche Zufallswege bei der Simulation eines Folgetests mit Gruppenauswertung

Mit Hilfe der hier definierten Entscheidungsregel (4.23) kann weiterhin auch eine beliebige (optimierte) Abbruchregel erfaßt werden.¹ Dazu sind lediglich die Annahmekennzahlen $a(x)$ durch

$$a^*(x) = \begin{cases} \min \{ a(x); n_0 \} & \text{für } x \leq c^*(n_0) \\ + \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.24)$$

und die Rückweisekennzahlen $r(x)$ durch

$$r^*(x) = \begin{cases} r(x) & \text{für } x \leq c^*(n_0) \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.25)$$

zu ersetzen. Dies gilt in gleicher Weise bei Einzel- und Gruppenauswertung: Bei Einzelauswertung sind für $a(x)$ und $r(x)$ die durch die Beziehungen (3.42) bis (3.49) bestimmten Werte, bei Gruppenauswertung die wie oben angegebenen gerundeten Werte einzusetzen. Die Abbruchgrenze n_0 soll dabei ein ganzzahliges Vielfaches des Gruppenumfangs n_d

¹ Vgl. S. 142 ff. dieser Arbeit.

sein. Für das Abbruchkriterium $c^*(n_0)$ können neben den durch die Beziehungen (3.97) und (3.98) gegebenen Werten auch beliebige andere Werte, die die Bedingung

$$c(n_0) \leq c^*(n_0) \leq d(n_0) \quad (4.26)$$

erfüllen, verwendet werden. Insbesondere ist es auch möglich,

$$c^*(n_0) = c(n_0) \quad (4.27)$$

vorzugeben; dadurch enthält man Entscheidungsbereiche, die den Entscheidungsbereichen bei Verwendung der Approximation 1 im Modell der Hypergeometrischen Verteilung entsprechen.¹ Beispiele für Zufallswege, die durch eine Abbruchregel betroffen sind, sind in der folgenden Abbildung 4.3 dargestellt.

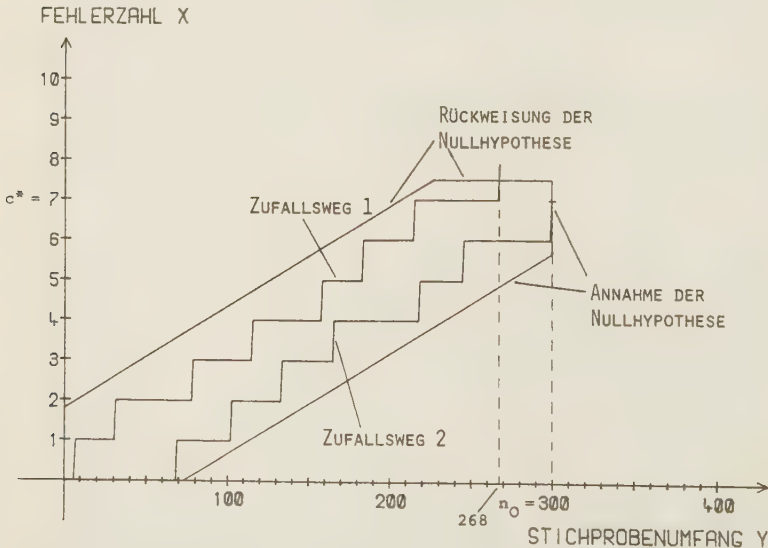


Abb. 4.3: Mögliche Zufallswege bei der Simulation eines Folgetests mit Abbruchregel

Die bisherigen Ausführungen sollen nun durch Beispiele verdeutlicht werden. Dazu ist zunächst auf die Möglichkeiten zur Bestimmung geometrisch verteilter Zufallszahlen einzu-

¹ Vgl. S. 113 ff. dieser Arbeit.

gehen, die ja zur Simulation eines Zufallsweges im Binomialmodell mit der Methode der variablen Inkremente benötigt werden. Die Bestimmung solcher Zufallszahlen (Zufallsgrößen) erfolgt im allgemeinen in einem zweistufigen Prozeß:¹ Zunächst werden im Intervall $[\bar{0}; 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen bestimmt, die in einem zweiten Schritt in Zufallszahlen transformiert werden, die der gewünschten Verteilung, hier also der Geometrischen Verteilung mit dem Parameter θ genügen. Da hier die Simulationsversuche mit Hilfe eines Computers durchgeführt werden, ist es günstiger, keine "echten" (physikalischen), sondern sogenannte "Pseudozufallszahlen" zu verwenden, die mit Hilfe eines Zufallsgenerators nach einem deterministischen Bildungsgesetz berechnet werden, aber weitgehend die gleichen Eigenschaften wie echte Zufallszahlen aufweisen.²

Eine Diskussion der verschiedenen Verfahren zur Bestimmung von im Intervall $[\bar{0}; 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen sowie der möglichen Tests zur Überprüfung der Güte der erzeugten Zahlen würde hier zu weit führen und soll deshalb unterbleiben. Für die Simulationsversuche in dieser Arbeit wurden gleichverteilte Zufallszahlen mit Hilfe eines in der NAG-Programmbibliothek enthaltenen Zufallszahlengenerators bestimmt, der die sogenannte multiplikative Kongruenzmethode verwendet.³ Ausgehend von im Intervall $[\bar{0}; 1]$ gleichverteil-

1 Vgl. MERTENS, P., a.a.O., S. 15.

2 Vgl. zu diesen und den folgenden Ausführungen z. B. BLEYMÜLLER, J., a.a.O., S. 3 ff.; HAMMERSLEY, HANDSCOMB, a.a.O., S. 25 ff.; HENGARTNER, Walter, THEODORESCU, Radu, Einführung in die Monte-Carlo-Methode, München, Wien 1978, S. 25 ff.; KÖCHER, MATT, OERTEL, SCHNEEWEISS, a.a.O., S. 94 ff.; KOHLAS, Jürg, Stochastische Methoden des Operations Research, Stuttgart 1977, S. 151 ff.; KRÜGER, Siegfried, Simulation - Grundlagen, Techniken, Anwendungen, Berlin, New York 1975, S. 106 ff.; MERTENS, P., a.a.O., S. 14 ff.; MIHRAM, G. Arthur, Simulation, Statistical Foundations and Methodology, New York, San Francisco, London 1972, S. 44 ff.; NAYLOR, Thomas H., Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems, New York, London, Sydney, Toronto 1971, S. 381 ff.; NAYLOR, BALINTFY, BURDICK, CHU, a.a.O., S. 43 ff.; SCHMITZ, LEHMANN, a.a.O., S. 13 ff.

3 Vgl. NAG, Numerical Algorithmus Group, FORTRAN library Manual Mark 7, Vol. 5, Oxford 1978, G05 - Random Number Generators, G05CAF, S. 1 ff. und die dort angegebene Literatur.

ten Zufallszahlen, d. h. von den Realisationen z'_i ($i=1,2,\dots$) einer im Intervall $[0;1]$ gleichverteilten (gleichförmig verteilten) Zufallsgröße, die "das Rohmaterial einer jeden Monte-Carlo-Simulation"¹ sind, findet man die Realisationen y'_i der einer vorgegebenen diskreten theoretischen Verteilung gehorchenden Zufallsgröße aus der Beziehung

$$F(y'_i - 1) < z'_i \leq F(y'_i) \quad , \quad (i=1,2,\dots) \quad (4.28)$$

wobei $F(y)$ die Verteilungsfunktion der gewünschten theoretischen Verteilung bezeichnet.² Als Realisation y'_i wird also immer die obere Grenze des Intervalls (4.28) verwendet, in das z'_i fällt. Im Falle der Geometrischen Verteilung, deren Verteilungsfunktion

$$F_G(y/\theta) = 1 - (1-\theta)^y \quad (y=1,2,\dots; 0 \leq \theta \leq 1) \quad (4.29)$$

lautet³, ergibt sich

$$1 - (1-\theta)^{y'_i - 1} < z'_i \leq 1 - (1-\theta)^{y'_i} \quad (i=1,2,\dots) \quad (4.30)$$

als Bestimmungsgleichung für y'_i . Wenn berücksichtigt wird, daß z'_i auch durch die Differenz $(1 - z'_i)$ ersetzt werden kann, die ebenfalls Realisation einer im Intervall $[0;1]$ gleichverteilten Zufallsgröße ist, findet man nach einigen Umformungen

$$y'_i - 1 < \frac{\ln z'_i}{\ln (1-\theta)} \leq y'_i \quad (i=1,2,\dots; y'_i \geq 1) \quad (4.31)$$

zur Bestimmung der i -ten Realisation y'_i einer geometrisch verteilten Zufallsgröße (Zufallszahl).⁴

1 KÖCHER, MATT, OERTEL, SCHNEEWEISS, a.a.O., S. 117.

2 Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem ebenda, S. 117 ff.; BLEYMÜLLER, J., a.a.O., S. 11 ff.; KOHLAS, J., a.a.O., S. 157 f.; SCHMITZ, LEHMANN, a.a.O., S. 63 ff.

3 Vgl. HASTINGS, PEACOCK, a.a.O., S. 74.

4 Vgl. auch ebenda, S. 77; SCHMITZ, LEHMANN, a.a.O., S. 81; NAYLOR, Th.H., a.a.O., S. 400 f.; NAYLOR, BALINTFY, BURDICK, CHU, a.a.O., S. 103 f.; sowie die dort angegebene Literatur.

Die oben beschriebene Simulationstechnik soll durch ein Beispiel verdeutlicht werden: Zu dem auf Seite 40 dieser Arbeit eingeführten Beispiel (1) wird als Abbruchgrenze $n_0 = 400$ festgelegt. Dieser Wert entspricht etwa dem Dreifachen von $ASN(s)$ des Folgetests bei konservativer Lösung¹ bzw. etwa dem Zweifachen des Stichprobenumfangs eines entsprechenden Einfachtests² und ist somit größer als in der Literatur meistens gefordert wird; d. h. der Einfluß eines Abbruchs auf die Wahrscheinlichkeiten eines α - und β -Fehlers dürfte vernachlässigbar sein.³ Als Abbruchkriterium wird der durch (3.98) bestimmte Wert für $c^*(n_0)$ verwendet. In diesem Beispiel ergibt sich $c^*(400) = 400 \cdot 0,024985 = 9,994$ bzw., wenn dieser Wert auf die nächste ganze Zahl abgerundet wird, $c^*(400) = 9$. Es soll

(a) Einzelauswertung ($n_d = 1$) und

(b) Auswertung in Gruppen von $n_d = 25$ Elementen

unterstellt werden. Ausgehend von den in der Tabelle 3.7 angegebenen Kennzahlen $a(x)$ und $r(x)$ offener Tests erhält man hier die in der folgenden Tabelle 4.1 abgedruckten Kennzahlen $a^*(x)$ und $r^*(x)$, die durch (4.24) bzw. (4.25) bestimmt sind.

Fehlerzahl x	Einzelauswertung $n_d = 1$		Gruppenauswertung $n_d = 25$	
	$a^*(x)$	$r^*(x)$	$a^*(x)$	$r^*(x)$
0	73	-73	75	-75
1	113	-33	125	-50
2	153	7	175	0
3	193	47	200	25
4	233	87	250	75
5	273	127	275	125
6	313	167	325	150
7	353	207	375	200
8	400	247	400	225
9	400	287	400	275
10	∞	400	∞	400

Tab. 4.1: Entscheidungskennzahlen eines geschlossenen Folgetests bei Einzel- oder Gruppenauswertung

¹ Vgl. Tab. 3.15 dieser Arbeit.

² Vgl. S. 45 f. dieser Arbeit.

³ Vgl. S. 145 dieser Arbeit und die dort angegebene

Für einen angenommenen Fehleranteil von $\theta = 0,04$ ergab sich z. B. der in der Tabelle 4.2 angegebene Zufallsweg.¹ Man sieht, daß im Falle der Einzelentnahme schon im dritten Simulationsschritt die Nullhypothese zurückgewiesen wird, der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang beträgt hier 44 Elemente. Im Falle der Auswertung in Gruppen ist dagegen - bei Verwendung der gleichen Zufallszahlen - eine Rückweisung der Nullhypothese erst im fünften Simulationsschritt möglich; der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang beträgt hier 125 Elemente, liegt also wesentlich höher als im ersten Fall.

Schritt i	Zufallszahlen		kumulierter Stichproben- umfang	Entscheidung im Fall	
	z'_i	y'_i		(a)	(b)
1	0,75254	7	7	W	W
2	0,81051	6	13	W	W
3	0,28436	31	44	R	W
4	0,03891	80	124	-	W
5	0,99749	1	125	-	R
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tab. 4.2: Simulation eines geschlossenen Folgetests bei Einzel- oder Gruppenauswertung

In dem hier dargestellten Beispiel zur Methode der variablen Inkremente ist im dritten bzw. im fünften Simulationsschritt eine Entscheidung möglich geworden. Im Fall (a) müssen hier nur drei, im Fall (b) nur fünf Zufallszahlen bestimmt werden. Demgegenüber wären bei der Simulation

¹ Die hier angegebenen Zufallszahlen wurden mit einem programmierbaren Taschenrechner vom Typ Texas Instruments-59 des Instituts für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik der WWU Münster bestimmt. Der dort eingebaute Zufallszahlengenerator (Programm ML-15) arbeitet nach der gemischten Kongruenzmethode; als Startwert wurde 31487 vorgegeben.

nach der Methode der fixen Inkremente¹ 44 bzw. 125 Zufallszahlen erforderlich gewesen, um zu dem gleichen Ergebnis zu kommen. Der Rechenaufwand ist also bei Verwendung der hier angegebenen Simulationstechnik nur ein Bruchteil des Aufwandes, den eine Simulation nach dem Verfahren der fixen Inkremente erfordern würde.

Zur Simulation eines Folgetests im Modell der Binomialverteilung dürfte die hier dargestellte Simulationstechnik die günstigste sein, da sie einerseits die Berücksichtigung von Modifikationen der Entscheidungsregel des Folgetestverfahrens sehr einfach gestattet und andererseits nur einen relativ geringen Rechenaufwand erfordert. Bei begrenzter Rechenzeit kann mit der hier dargestellten Methode eine wesentlich größere Zahl (etwa das Zwanzig- bis Fünffzigfache) an Simulationsversuchen durchgeführt werden als dies mit der Methode der fixen Inkremente möglich wäre.

Von der verfügbaren Rechenzeit hängt auch ab, welche Werte für den Fehleranteilswert θ des Prüfungsfeldes, aus dem die (simulierte) Entnahme erfolgt, gewählt werden sollen und wie groß die Zahl m der Versuche zu jedem dieser vorgegebenen Fehleranteilswerte sein soll. Dieses Problem wird auch als Auslegung bzw. als Bemessung eines Simulationsexperiments bezeichnet.² Im Rahmen dieser Arbeit sollen nur drei verschiedene Anteilswerte berücksichtigt werden, nämlich $\theta = 0,010$; $0,025$ und $0,050$. Da für die in dieser Arbeit konstruierten Beispiele $s \approx 0,025$ gilt, stimmen diese drei Werte exakt oder ungefähr mit den Anteilswerten θ_0 , s und θ_A überein, für die sich Näherungslösungen für die OC- und ASN-Funktion eines Folgetests leicht bestimmen lassen.³ Als Zahl der Versuche zu jedem dieser Anteilswerte soll einem Vorschlag von COLTON und McPHERSON

¹ Vgl. S. 200 ff. dieser Arbeit.

² Vgl. MERTENS, P., a.a.O., S. 22 ff. und die dort angegebene Literatur.

³ Vgl. S. 155 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

entsprechend $m = 1000$ vorgegeben werden.¹ Dieser Umfang dürfte, wie Versuche des Verfassers mit größeren und kleineren Werten für m gezeigt haben, einen recht guten Kompromiß zwischen der erreichbaren Genauigkeit und dem Rechenaufwand darstellen.

4.2.4 Darstellung und Diskussion der Simulationsergebnisse

Auf den folgenden Seiten sollen Ergebnisse von Simulationsexperimenten, die mit Hilfe der oben beschriebenen Simulationstechnik durchgeführt wurden, anhand von Tabellen und Schaubildern dargestellt und interpretiert werden. Grundlage sind modifizierte Folgetests zu den beiden auf Seite 40 dieser Arbeit eingeführten Beispielen. Zu beiden Beispielen wurde eine Abbruchregel vorgegeben, wobei, ausgehend von den auf Seite 211 dieser Arbeit angegebenen Überlegungen

zu Beispiel (1): $n_0 = 400$ und

zu Beispiel (2): $n_0 = 500$

gewählt wurde; als Abbruchkriterium wurde der durch (3.98) bestimmte Wert verwendet. Zu beiden Beispielen wurden zwei Fälle berücksichtigt:

(a) Einzelauswertung ($n_d = 1$) und

(b) Auswertung in Gruppen von $n_d = 25$ Elementen;

dabei wurden im Falle einer Gruppenauswertung die beiden Alternativen: vorzeitiger Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze bzw. vollständige Auswertung der Gruppen (ohne die Möglichkeit eines vorzeitigen Abbruchs) parallel erfaßt. Zu jedem dieser insgesamt vier Tests wurden zu den drei Anteilswerten $\theta = 0,010$; $0,025$ und $0,050$ jeweils $m = 1000$ Simulationsversuche durchgeführt.²

¹ Vgl. COLTON, McPHERSON, a.a.O., S. 83 ff.

² Die Rechnungen wurden auf der IBM 3032 des Rechenzentrums der WWU Münster durchgeführt, die Programm- und Dateneingabe erfolgte über ein Bildschirmterminal (Datensichtgerät) im VSPC-System. Als Programmiersprache wurde FORTRAN IV verwendet.

Ein Auszug aus den Ergebnissen der Simulationsversuche zu Beispiel (1) bei Einzelauswertung für einen angenommenen Fehleranteil von $\theta = 0,025$ ist in der Tabelle 4.3 abgedruckt und in der Abbildung 4.4 grafisch dargestellt. Dabei sind Zufallswege, die mit einer Annahme der Nullhypothese enden, durch A und Zufallswege, die mit einer Rückweisung der Nullhypothese enden, durch R gekennzeichnet. Wie theoretisch zu erwarten war, sind Annahme und Rückweisung der Nullhypothese etwa gleich häufig. Auffällig sind vor allem aber die extremen Schwankungen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs, der in dem hier dargestellten Ausschnitt Werte zwischen 37 und 400 aufweist. Diese Schwankungen werden vor allem in der Abbildung 4.4 gut sichtbar.

Schritt	Entscheidung	Fehlerzahl	Stichprobenumfang
21	R	4	79
22	R	5	122
23	R	10	378
24	A	5	273
25	R	3	37
26	A	1	113
27	R	5	112
28	A	9	400
29	A	4	233
30	R	5	124
31	R	5	103
32	A	1	113
33	R	4	86
34	A	0	73
35	A	0	73
36	A	3	193
37	A	2	153
38	R	3	41
39	R	5	105
40	R	7	189

Tab. 4.3: Auszug aus den Ergebnissen der Simulationsversuche zu Beispiel (1)

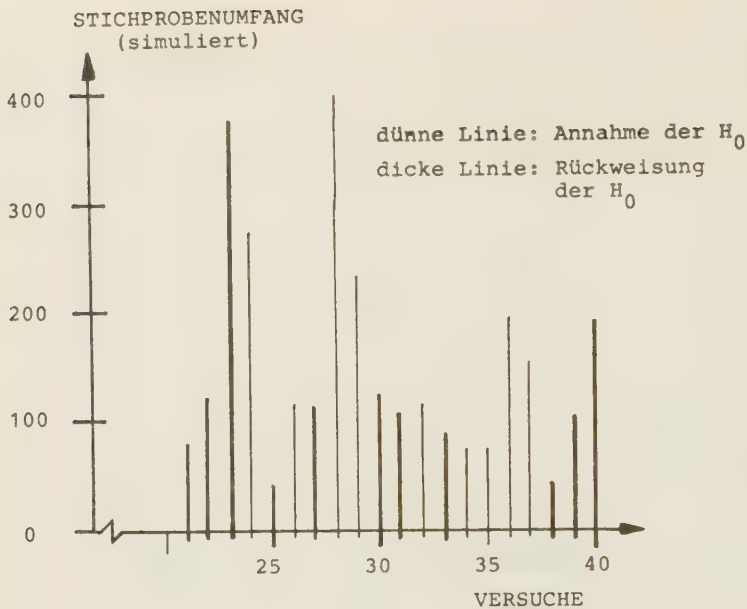


Abb. 4.4: Auszug aus den Ergebnissen der Simulationsversuche zu Beispiel (1)

Die mit Hilfe der in Punkt 4.2.2 angegebenen Schätzverfahren gefundenen Punktschätzwerte und 95 %-Konfidenzintervalle für $OC(\theta)$ und $ASN(\theta)$ sowie die Punktschätzwerte für $VSN(\theta)$ zu den hier berücksichtigten Folgetests sind in der Tabelle 4.4 abgedruckt. Im Falle der Gruppenauswertung sind dabei zunächst die Schätzwerte bzw. Intervallgrenzen angegeben, die man bei vollständiger Auswertung der Gruppen erhält; darunter sind (in Klammern) die Werte abgedruckt, die sich im Falle eines vorzeitigen Abbruches bei Erreichen der Rückweisungsgrenze ergeben. Die Punktschätzwerte und Intervallgrenzen für $OC(\theta)$ sind bei Gruppenauswertung für diese beiden Varianten gleich, da in beiden Fällen die gleichen Zufallszahlen zugrunde liegen.

Bei- spiel	Fehler- anteil	$\hat{\alpha}(\theta)$	Unter- grenze	Ober- grenze	$\hat{\alpha}N(\theta)$	Unter- grenze	Ober- grenze	$\hat{V}N(\theta)$	$\sqrt{\hat{V}N(\theta)}$
1 a	0.0100	0.9810	0.9705	0.9878	117.31	113.38	121.23	4007.09	63.30
	0.0100	0.9870	0.9779	0.9924	130.65 (130.50)	126.15 (126.01)	135.15 (135.00)	5265.84 (5260.66)	72.57 (72.53)
1 b	0.0250	0.5260	0.4950	0.5568	148.76	142.62	154.91	9834.94	99.17
	0.0250	0.5280	0.4970	0.5588	187.57 (182.78)	180.61 (175.83)	194.54 (189.74)	12630.12 (12577.22)	112.38 (112.15)
1 a	0.0500	0.0490	0.0373	0.0642	78.86	74.92	82.81	4047.18	63.62
	0.0500	0.0420	0.0312	0.0563	102.85 (93.40)	98.47 (89.03)	107.23 (97.76)	4985.61 (4964.53)	70.61 (70.46)
2 a	0.0100	0.9780	0.9669	0.9854	151.08	146.38	155.79	5763.97	75.92
	0.0100	0.9850	0.9754	0.9909	165.42 (165.24)	160.22 (160.03)	170.63 (170.45)	7049.74 (7058.30)	83.96 (84.01)
2 b	0.0250	0.4850	0.4541	0.5160	195.23	186.96	203.50	17811.13	133.46
	0.0250	0.4910	0.4601	0.5220	233.95 (228.90)	225.05 (219.96)	242.85 (237.85)	20609.26 (20833.35)	143.56 (144.34)
2 a	0.0500	0.0200	0.0130	0.0307	83.20	78.74	87.67	5188.80	72.03
	0.0500	0.0170	0.0106	0.0271	108.25 (98.53)	103.50 (93.79)	113.00 (103.27)	5880.32 (5857.72)	76.68 (76.54)

Tab. 4.4: Ergebnisse von je 1000 Simulationsversuchen zu ausgewählten Folgetests bei Einzelauswertung bzw. Auswertung in Gruppen von je 25 Elementen

Die Schätzwerte und Schätzintervalle für $OC(\theta)$ zu den hier gewählten Beispielen sind in den Abbildungen 4.5 und 4.6 auch grafisch dargestellt. Dabei sind zusätzlich die durch die Gleichungen (3.99 ff.) bestimmten Näherungen für die OC-Funktion der entsprechenden (unmodifizierten) Folgetests eingezeichnet. Aus der Tabelle 4.4 und den Abbildungen 4.5 und 4.6 kann man ablesen, daß für die Anteilswerte $\theta = 0,010$ und $\theta = 0,025$ die geschätzten Annahmewahrscheinlichkeiten (Werte der OC-Funktion) durchweg höher sind als die mit Hilfe der von WALD entwickelten Näherungslösung berechneten Werte.¹ Vor allem bei $\theta = 0,010$ kann dieser Unterschied als signifikant² bezeichnet werden, da in allen Fällen selbst die untere Intervallgrenze $OC_1(\theta)$ größer ist als der erwartete Wert von $1 - \alpha = 0,95$. Auch an der Stelle $\theta = 0,025$ liegen die Schätzwerte $OC(\theta)$ für alle hier berücksichtigten Tests über den in Tabelle 3.13 abgedruckten näherungsweise berechneten Werten. In den Tests zu Beispiel (2) kann sowohl bei Einzel- als auch bei Gruppenauswertung diese Abweichung ebenfalls als signifikant bezeichnet werden, wogegen in beiden Fällen zu Beispiel (1) der erwartete Wert von $OC(s) \approx 0,5$ von den gefundenen Konfidenzintervallen gerade noch überdeckt wird. Bei einem Anteilswert von $\theta = 0,050$ liegen die im Falle der Einzelentnahme gefundenen Schätzwerte in Beispiel (1) knapp unter dem erwarteten Wert von $\beta = 0,05$ und in Beispiel (2) genau auf dem erwarteten Wert von $\beta = 0,02$. Bei Gruppenauswertung sind die Schätzwerte dagegen deutlicher kleiner als die höchstzulässigen Werte von $0,05$ bzw. $0,02$. Daraus kann man schließen, daß bei Gruppenauswertung die Einhaltung der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit eines β -Fehlers eher gewährleistet ist als bei Einzelauswertung. In allen Fällen liegt jedoch die obere Intervallgrenze $OC_2(\theta)$ über dem zulässigen Wert für β . Wahrscheinlichkeitsaussagen darüber, ob die hier ausgewählten Folge-

1 Vgl. auch Tab. 3.13 auf S. 158 dieser Arbeit.

2 Bei einem Signifikanzniveau von $0,975$ (einseitig).

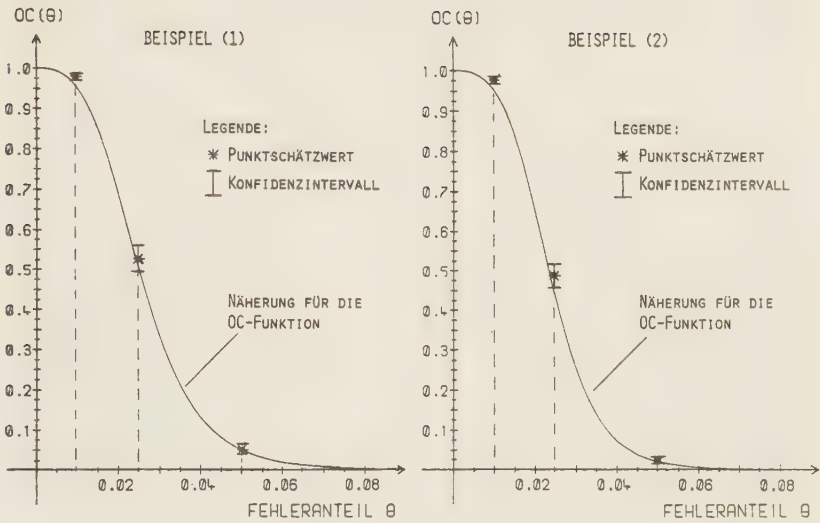


Abb. 4.5: Schätzwerte und Näherungen für die OC-Funktionen ausgewählter Folgetests bei Einzelauswertung

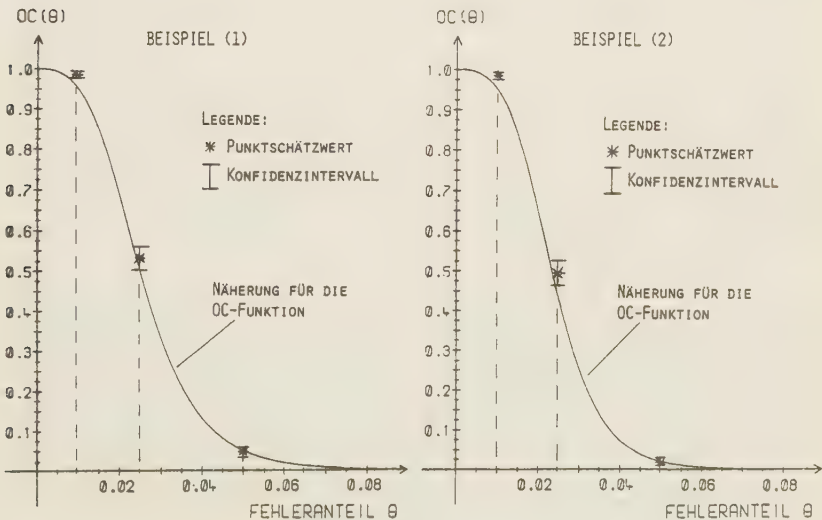


Abb. 4.6: Schätzwerte und Näherungen für die OC-Funktionen ausgewählter Folgetests (Auswertung in Gruppen)

tests die Einhaltung der zulässigen Wahrscheinlichkeit eines β -Fehlers garantieren, sind allein mit Hilfe der hier gefundenen Ergebnisse noch nicht möglich.

Die in der Tabelle 4.4 angegebenen Schätzwerte und Schätzintervalle für $ASN(\theta)$ für den Fall, daß die Gruppen jeweils voll erhoben werden, sind in den Abbildungen 4.7 und 4.8 grafisch dargestellt. In diesen Abbildungen sind als Vergleichsgrundlage die durch die Gleichungen (3.144 ff.) bestimmten Näherungen für die ASN-Funktion der entsprechenden (unmodifizierten) Folgetests sowie die ASN-Funktionen entsprechender abgebrochener Doppeltests zu den Beispielen (1) und (2) eingezeichnet.¹ Durch Vergleich der gefundenen Schätzwerte mit den entsprechenden Werten der Näherungslösung nach WALD² findet man, daß bei beiden Beispielen selbst im Falle der Einzelauswertung die Schätzintervalle für alle hier berücksichtigten Fehleranteile θ vollständig oberhalb der näherungsweise berechneten Werte liegen. Dies bedeutet, daß für diese Anteilswerte der durchschnittliche Stichprobenumfang bei einem Signifikanzniveau von 0,975 (einseitig) signifikant größer ist als der durch die Näherungsformel von WALD gelieferte Wert. Bei einem Fehleranteil von $\theta = 0,025$ sind die gefundenen Schätzwerte in beiden Beispielen sogar signifikant größer als der durchschnittliche Stichprobenumfang eines entsprechenden abgebrochenen Doppeltests; für Fehleranteile von $\theta = 0,010$ oder $0,050$ liegen dagegen die Schätzintervalle unterhalb der ASN-Funktion der entsprechenden Doppeltests.

Im Falle einer Gruppenauswertung geraten die hier beschriebenen Folgetests gegenüber entsprechenden Doppeltests noch stärker ins Hintertreffen, wie man aus der Abbildung 4.8 erkennen kann: Die Folgetests sind in beiden Beispielen bei einem Fehleranteil von $\theta = 0,010$ den entsprechenden Doppel-

¹ Vgl. Abschnitt 2.5 dieser Arbeit.

² Vgl. auch Tabelle 3.15 auf S. 175 dieser Arbeit.

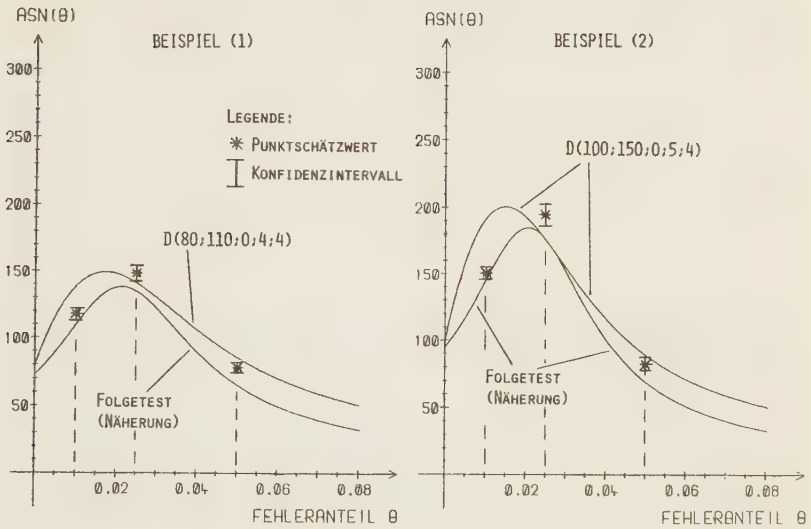


Abb. 4.7: Schätzwerte und Näherungen für die ASN-Funktionen ausgewählter Folgetests bei Einzelauswertung sowie ASN-Funktionen entsprechender Doppeltests

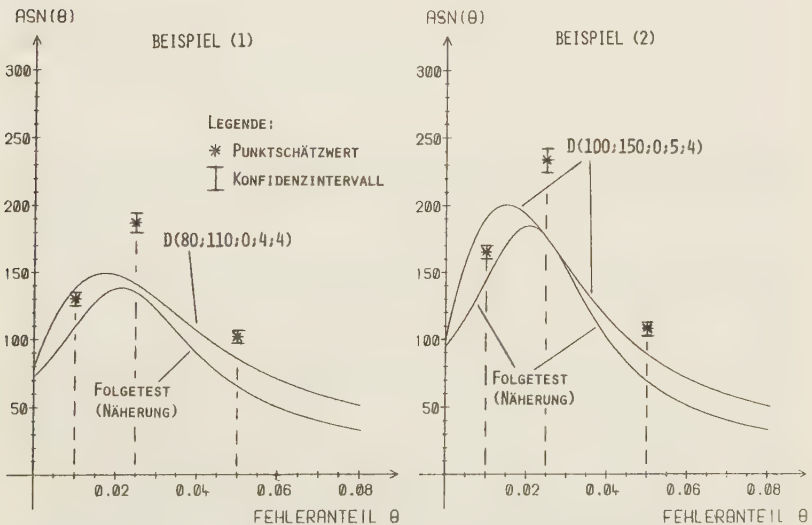


Abb. 4.8: Schätzwerte und Näherungen für die ASN-Funktionen ausgewählter Folgetests (Auswertung in Gruppen) sowie ASN-Funktionen entsprechender Doppeltests

tests knapp überlegen, aber für Fehleranteile von $\theta = 0,025$ und $0,050$ den entsprechenden Doppeltests zum Teil sehr deutlich unterlegen. Auch die Vereinbarung eines vorzeitigen Abbruchs bei Erreichen der Rückweisegrenze hat, wie man aus der Tabelle 4.4 ablesen kann, nur einen geringen Einfluß auf die ASN-Funktionen der Folgetests und ändert nichts an dem im Vergleich mit entsprechenden Doppeltests sehr ungünstigen Abschneiden der Folgetests mit Gruppenauswertung.

Die Schätzwerte für die Varianz des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs liegen bei Gruppenauswertung ebenfalls deutlich über den entsprechenden Schätzwerten bei Einzelauswertung. Dabei ist es praktisch bedeutungslos, ob vollständige Auswertung der Gruppen oder ein vorzeitiger Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze unterstellt wird: In beiden Fällen erhält man etwa übereinstimmende Schätzwerte für $VSN(\theta)$. Dies gilt, wie man aus Tabelle 4.4 erkennen kann, für beide Beispiele (1) und (2) und für alle hier betrachteten Fehleranteilswerte θ .

Die sehr ungünstigen Eigenschaften der Folgetests bei Gruppenauswertung sind teilweise durch die hier - wie auch in der Literatur - zugrunde gelegte konservative Rundung der Bereichsgrenzen bedingt.¹ Durch diese Rundung erhält man kleinere als vorgegebene Wahrscheinlichkeiten eines α - und β -Fehlers. Jede Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeiten bedeutet jedoch ceteris paribus eine Erhöhung des (durchschnittlich) entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs. Ein Ausweg könnte eine Herabsetzung der Abbruchgrenze n_0 und/oder eine künstliche Verengung des Weiterprüfungsbereiches sein. Beide Maßnahmen führen ceteris paribus wieder zu höheren Fehlerwahrscheinlichkeiten und somit zu einem geringeren (durchschnittlichen) Stichprobenumfang. Zur Auswahl eines geeigneten modifizierten Folgetests, der die Einhaltung

¹ Vgl. S. 122 und S. 128 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

der vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten gerade noch garantiert, ist die Simulationstechnik jedoch kaum geeignet, da die Schätzintervalle für $OC(\theta)$ selbst bei $m = 1000$ Versuchen noch relativ breit sind. Alternative Möglichkeiten zur Auswahl eines zulässigen sequentiellen Tests mit Gruppenauswertung sind erst im fünften Kapitel dieser Arbeit darzustellen; bis dahin sollen in dieser Arbeit nur Folgetests mit Einzelauswertung berücksichtigt werden.

Da für die hier vorgegebenen Folgetests eine Auswertung in Gruppen nicht sinnvoll ist, wie in den vorangegangenen Ausführungen gezeigt wurde, sollen hier Schätzwerte für die Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ ($y=1,2,\dots,n_0$) des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs nur für den Fall der Einzelauswertung bestimmt werden.¹ Eine tabellarische Darstellung dieser Schätzwerte erscheint wegen der Vielzahl möglicher Ausprägungen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs als nicht zweckmäßig; statt dessen sind die geschätzten Verteilungsfunktionen zu Beispiel (1) für die drei hier berücksichtigten Fehleranteilswerte von $\theta = 0,010$, $0,025$ und $0,050$ in der Abbildung 4.9 grafisch dargestellt; die entsprechenden Verteilungsfunktionen zu Beispiel (2) sind in der Abbildung 4.10 dargestellt.

Die Verteilungsfunktionen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs unterscheiden sich, wie man aus den Abbildungen 4.9 und 4.10 erkennt, für alternative Fehleranteilswerte sehr stark voneinander. Für einen Anteilswert von $\theta = 0,010$ weisen die Verteilungsfunktionen zu Beispiel (1) und zu Beispiel (2) große Sprünge auf, zwischen denen die Verteilungsfunktionen fast waagerecht verlaufen. Diese Sprünge treten bei den Stichprobenumfängen auf, die den Annahmekennzahlen $a^*(x)$ ($x=0,1,\dots$) der beiden Folgetests

¹ Im Falle der Gruppenauswertung würde man, wenn ein vorzeitiger Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze nicht zulässig ist, für die geschätzten Verteilungsfunktionen Treppenfunktionen erhalten, bei denen die Sprungstellen jeweils bei ganzzahligen Vielfachen des Gruppenumfangs n_d liegen.

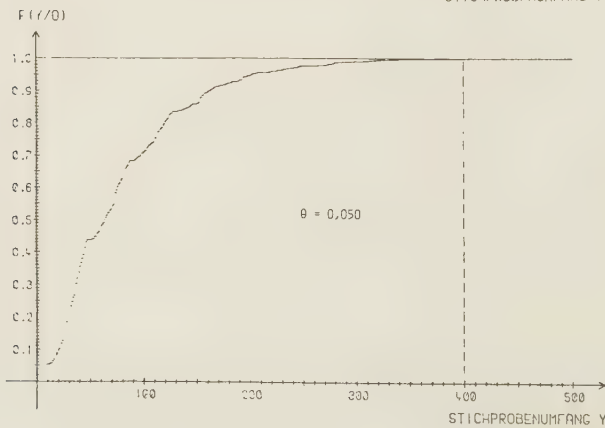
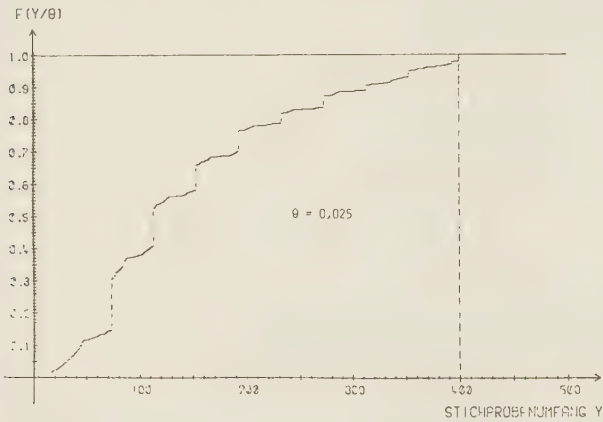
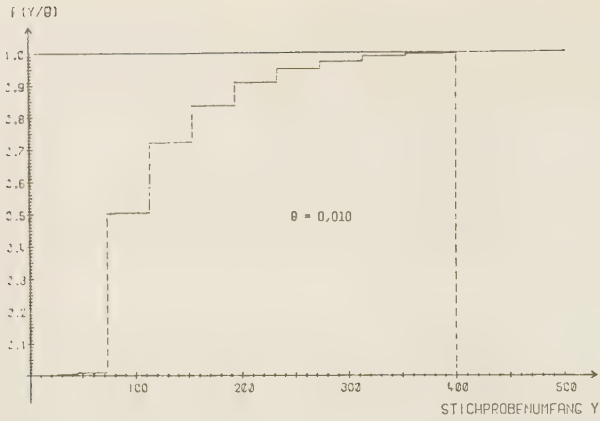


Abb. 4.9: Schätzwerte der Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ des Folgetests zu Beispiel (1)

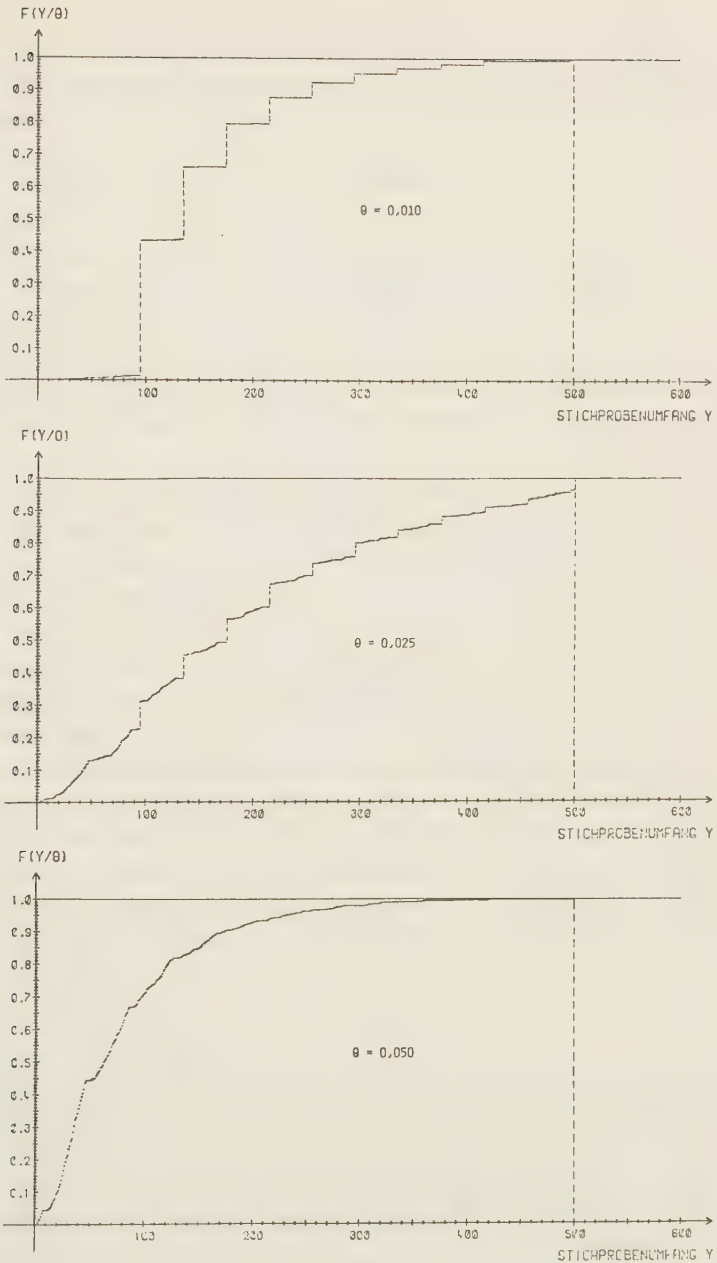


Abb. 4.10: Schätzwerte der Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ des Folgetests zu Beispiel (2)

entsprechen, also in Beispiel (1) bei den Stichprobenumfängen $y=73, 113, 153, 193, \dots, 400$ und in Beispiel (2) bei den Stichprobenumfängen $y=95, 135, 175, 215, \dots, 500$.

Für einen Anteilswert von $\theta = 0,050$ kann man die Verteilungsfunktionen zu beiden Beispielen in Abschnitte einteilen, in denen diese Funktion zunächst fast waagerecht und dann relativ steil ansteigend verlaufen. Die Ursache für diese Erscheinung liegt im diskreten Charakter der Rückweisesgrenze: bei einem Stichprobenumfang y , der um eine Einheit größer ist als eine Rückweisekennzahl $r^*(x)$ ($x=2,3,\dots$) ist keine Rückweisung möglich, d. h. der Zuwachs der Verteilungsfunktion ist, wenn nicht zufällig genau an dieser Stelle eine Annahme der Nullhypothese möglich ist, Null. Auch bei den darauf folgenden Stichprobenumfängen sind die Zuwächse der Verteilungsfunktion zunächst klein; diese Zuwächse steigen dann jedoch an und sind solange deutlich ausgeprägt, bis der Stichprobenumfang y die nächstgrößere Rückweisekennzahl $r^*(x)$ erreicht. In beiden hier gewählten Beispielen besitzen die Rückweisekennzahlen die Werte 7, 47, 87, 127, $\dots, 400$ (bzw. 500); die Verteilungsfunktionen zu beiden Beispielen sind also im Falle $\theta = 0,050$ relativ ähnlich. Die Verteilungsfunktion zu Beispiel (2) verläuft allerdings flacher als die entsprechende Verteilungsfunktion zu Beispiel (1). Unterschiede bestehen auch in der Lage der Sprünge, die durch den diskreten Charakter der Annahmegrenze entstehen: Diese Sprünge sind jedoch, vor allem bei Beispiel (2), sehr schwach ausgeprägt und optisch kaum feststellbar.

Für einen vorgegebenen Fehleranteilswert von $\theta = 0,025$ erkennt man aus den Abbildungen 4.9 und 4.10, daß die geschätzten Verteilungsfunktionen zu beiden Beispielen eine "Mischform" der oben beschriebenen charakteristischen Verläufe darstellen. Sowohl die Sprünge der Verteilungsfunktion an den Stellen $y = a^*(x)$ ($x=0,1,\dots$) als auch die "Knicke" an den Stellen $y = r^*(x)$ ($x=2,3,\dots$) sind deutlich erkennbar. Man sieht weiterhin, daß auch der Anteil der Zufallswege,

die die Abbruchgrenze erreichen, bei einem Anteilswert von $\theta = 0,025$ relativ hoch war; dieser Anteil betrug hier bei Beispiel (1) 0,020 bzw. 2,0 % und bei Beispiel (2) 0,034 bzw. 3,4 %. Dies bedeutet, daß selbst bei den hier vorgegebenen sehr hohen Abbruchgrenzen n_0 die Wahl des Abbruchkriteriums $c(n_0)$ noch einen relativ großen Einfluß auf die Lage der OC-Funktion an der Stelle $\theta = 0,025$ besitzt. Für Anteilswerte von $\theta = 0,010$ oder $0,050$ war dagegen der Anteil der Zufallswege, die die Abbruchgrenze erreichten, sehr gering, so daß in diesen Beispielen die Wahl des Kriteriums $c(n_0)$ nur einen geringen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeiten eines α - oder β -Fehlers besitzt.

Aus den hier gefundenen Ergebnissen kann man schließen, daß eine Approximation der Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs beim Folgetest im Binomialmodell durch eine einzige theoretische Verteilung kaum sinnvoll möglich sein dürfte. Eine zufriedenstellende Approximation ist nur durch eine Mischverteilung zu erwarten, bei der die Einflüsse der Annahmegrenze und der Rückweisegrenze und auch einer eventuell vorhandenen Abbruchregel separat erfaßt werden. Eine Diskussion der Möglichkeiten zur Konstruktion einer solchen Approximationsverteilung würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen, so daß darauf hier nicht weiter eingegangen werden soll.

4.2.5 Zusammenfassung und Ausblick

In den vorangegangenen Abschnitten sind eine Technik zur Simulation von Folgetests und die mit Hilfe dieser Technik zu ausgewählten Beispielen gefundenen Simulationsergebnisse dargestellt worden. Wie hier gezeigt wurde, können mit der Methode der variablen Inkremente Folgetests im Modell der Binomialverteilung schnell und effizient simuliert werden; Modifikationen, z. B. durch die Vereinbarung

einer Auswertung in Gruppen und/oder durch die Vorgabe einer Abbruchregel können sehr einfach berücksichtigt werden. Zur Durchführung von 1000 Versuchen sind bei Verwendung eines modernen Computers nur Bruchteile einer Sekunde erforderlich.¹

Als Ergebnis der durchgeführten Simulationsexperimente, bei denen zu mehreren Beispielen für drei angenommene Fehleranteile θ jeweils 1000 Versuche durchgeführt wurden, ist festzuhalten, daß die in Abschnitt 3.5 dieser Arbeit angegebenen Näherungslösungen für die OC- und ASN-Funktion relativ ungenau sind. Für kleine und mittlere Fehleranteile sind die Annahmewahrscheinlichkeiten größer als erwartet; für größere Fehleranteile stimmen die geschätzten Annahmewahrscheinlichkeiten etwa mit den erwarteten Werten überein. Die Operationscharakteristik (OC-Funktion, Annahmekennlinie) verläuft also in Wirklichkeit steiler als in den Näherungsformeln nach WALD angegeben. Dies gilt vor allem für den Fall einer Auswertung in Gruppen.

Auch die Schätzwerte für den durchschnittlich entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang (Schätzwerte für $ASN(\theta)$) liegen durchweg über den näherungsweise berechneten Werten, d. h. die Näherungsformeln unterschätzen den wahren Wert der ASN-Funktion.² Frappant sind die Abweichungen vor allem im Fall einer Auswertung und Entnahme in Gruppen. In den hier dargestellten Beispielen weisen für mittlere oder größere Fehleranteile passende abgebrochene Doppeltests einen geringeren durchschnittlichen Stichprobenumfang auf als die hier vorgestellten Folgetests mit Gruppenauswertung. Da zudem ein Doppeltest einfacher zu handhaben ist als ein Folgetest und geringere Anforderungen an die Qualifikation

1 Die Berechnungen wurden auf einer IBM 3032 des Rechenzentrums der WWU Münster durchgeführt. Für 1000 Versuche wurden durchschnittlich 0,4 sec. Rechenzeit benötigt.

2 Das gleiche Ergebnis erhalten auch COLTON und McPHERSON für Beispiele von Folgetests mit Einzelauswertung, vgl. COLTON, McPHERSON, a.a.O., S. 83 ff.

des Prüfers stellt, erscheint zunächst die Verwendung eines Doppeltests gegenüber einem Folgetest mit Gruppenauswertung als die bessere Wahl. Ein weiteres Argument zugunsten des Doppeltests ist, daß die Variation des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs hier geringer ist und eine Obergrenze des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs, die für Zwecke der Prüfungsplanung benötigt wird¹, sehr einfach als Umfang $n_1 + n_2$ der kombinierten Stichprobe bestimmt werden kann. Eine abschließende Diskussion der Vorzüge und Nachteile dieser verschiedenen Verfahren soll jedoch erst im fünften Kapitel dieser Arbeit erfolgen.

Probleme bei der Anwendung der Simulationstechnik liegen vor allem im Zufallscharakter der Simulationsergebnisse. Selbst bei jeweils 1000 Simulationsversuchen sind die hier gefundenen Konfidenzintervalle für Werte der OC- und ASN-Funktion noch relativ breit. Offen blieb vor allem, ob bei den hier gewählten Beispielen die vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers zweiter Art (β -Fehlers) eingehalten werden oder nicht. Eine höhere Genauigkeit ließe sich durch eine größere Zahl von Simulationsversuchen erreichen. Einer Erhöhung der Genauigkeit sind jedoch Grenzen gesetzt: Bei einer sehr großen Zahl von Versuchen nimmt der Einfluß eventueller Mängel des verwendeten Zufallszahlengenerators zu, so daß also in diesem Fall zunächst eine sorgfältige Prüfung des verwendeten Zufallszahlengenerators ratsam erscheint.² Dagegen ist die Gefahr, daß der verwendete Zufallszahlengenerator in eine Periode gerät und somit sich ständig wiederholende Ergebnisse produziert³, bei der hier angewandten Simulationstechnik relativ gering, da für jeden Versuch nur wenige Zufallszahlen benötigt werden. Auf eine ausführlichere Darstellung dieser Probleme soll hier jedoch verzichtet werden.

1 Vgl. S. 185 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. S. 207 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

3 Vgl. hierzu auch KÖCHER, MATT, OERTEL, SCHNEEWEISS, a.a.O., S. 101 ff.; NAYLOR, BALINTFY, BURDICK, CHU, a.a.O., S. 48 ff. und S. 63 ff.; SCHMITZ, LEHMANN, a.a.O., S. 25 ff.

Die hier beschriebene Simulationstechnik nach der Methode der variablen Inkremente ist dann nicht ohne weiteres anwendbar, wenn es sich um stetige Zufallsvariable handelt, zum Beispiel bei der Simulation von Folgetests aus normalverteilten Grundgesamtheiten. In diesem Fall ist die Simulation nach der Methode der fixen Inkremente durchzuführen.¹ Offen bleibt, ob die hier dargestellte Simulationstechnik im Modell der Hypergeometrischen Verteilung zweckmäßig ist oder nicht. Die Verteilung der Anzahl von Elementen bis zum Auffinden des ersten fehlerhaften Elementes (einschließlich) im Modell der Hypergeometrischen Verteilung (Modell der Entnahme ohne Zurücklegen) ist ein Spezialfall der sogenannten Negativen Hypergeometrischen Verteilung, die ähnlich hergeleitet werden kann wie die Negative Binomialverteilung im Binomialmodell.²

Ausgehend von der Realisation z'_1 einer im Intervall $[0;1]$ gleichverteilten Zufallsgröße würde man die gesuchte Realisation einer negativ hypergeometrisch verteilten Zufallsgröße y'_1 anhand der Beziehung (4.28) erhalten, wobei hier $F(y)$ für die Verteilungsfunktion der Negativen Hypergeometrischen Verteilung steht. Der erforderliche Rechenaufwand ist in diesem Fall jedoch sehr groß, da hier eine einfache Transformation der Beziehung (4.28), wie sie am Beispiel der geometrischen Verteilung dargestellt wurde, nicht möglich ist und da außerdem bei jedem Simulationsschritt von neuem die sich durch die Entnahme ohne Zurücklegen ständig ändernde Zusammensetzung der Grundgesamtheit berücksichtigt werden muß. Auf eine detaillierte Darstellung der Möglichkeiten zur Bestimmung negativ hypergeometrisch verteilter Zufallszahlen soll hier nicht weiter eingegangen werden, da die praktische Bedeutung solcher Zahlen offensichtlich gering ist.

¹ Vgl. S. 200 ff. dieser Arbeit.

² Zur Negativen Hypergeometrischen Verteilung vgl. JOHNSON, Norman L., KOTZ, Samuel, Discrete Distributions, Boston, New York, Atlanta, usw. 1969, S. 157 und die dort angegebene Literatur.

Angesichts des im Modell der Hypergeometrischen Verteilung hohen Aufwandes zur Durchführung einer Simulation dürfte in diesem Fall das im folgenden Abschnitt darzustellende Rekursionsverfahren der Simulationstechnik vorzuziehen sein. Dieses Rekursionsverfahren gestattet, wie zu zeigen sein wird, die exakte Berechnung der Werte der OC-, ASN- und VSN-Funktion sowie der Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ ($y=1,2,\dots,n_0$) eines beliebigen geschlossenen Folgetests im Modell der Binomial- oder der Hypergeometrischen Verteilung. Im Gegensatz zur Simulationstechnik kann mit diesem Verfahren auch zuverlässig festgestellt werden, ob ein vorgegebener (modifizierter) Folgetest die Einhaltung der zulässigen Fehlerwahrscheinlichkeiten garantiert oder nicht. Bei Anwendung dieses Rekursionsverfahrens ist man, stärker noch als bei der Durchführung von Simulationsexperimenten, auf die Verwendung eines programmierbaren Kleinrechners oder Computers angewiesen.

4.3 Rekursive Berechnung der Kenngrößen eines Folgetests

4.3.1 Vorbemerkung

Wie bereits in Abschnitt 4.1 dieser Arbeit angegeben worden war, können die wichtigsten Kenngrößen eines Folgetests zur Attributprüfung, d. h. die Werte der OC-, ASN- und VSN-Funktion sowie der Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ für einen vorgegebenen Fehleranteilswert θ auch mit Hilfe von Rekursionsbeziehungen bestimmt werden. In der Literatur ist hierzu eine Vielzahl von Verfahren entwickelt worden, auf die nicht alle eingegangen werden kann. Ausführlicher darzustellen ist lediglich ein sehr allgemein verwendbares Verfahren, das für beliebige Folgetests, auch mit modifizierten Bereichsgrenzen, geeignet ist. Dieses Verfahren ist in der Literatur auch unter der Bezeichnung "direkte Methode" ("direct method") bekannt.¹

¹ In Anlehnung an AROIAN, L.A., Sequential Analysis, Direct Method, a.a.O., S. 125 ff.; ders., Applications of the Direct Method ..., a.a.O., S. 301 ff.

Ein von PÓLYA entwickelter Ansatz, der als ein Vorläufer der hier darzustellenden Rekursionsmethode gelten kann, ist in der Literatur, vor allem zum wirtschaftlichen Prüfungswesen, weitgehend unbekannt geblieben.¹ Aufbauend auf einem System von Rekursionsbeziehungen, mit deren Hilfe die Wahrscheinlichkeiten zur Erreichung beliebiger Punkte im Weiterprüfungsbereich berechnet werden können, leitet PÓLYA allgemeine Lösungen ab, bei denen die OC- und die ASN-Funktion jeweils als Quotient von Polynomen in θ und $(1-\theta)$ bestimmt sind.² Die von PÓLYA gegebene Herleitung geht von der Voraussetzung aus, daß die Bereichsgrenzen des betrachteten Folgetests parallele Geraden mit rationaler Steigung s sind³ und daß eine Abbruchgrenze nicht existiert.⁴ Wenn die Steigung der Bereichsgrenzen nicht rational ist, sind allenfalls Näherungslösungen möglich; für den Fall, daß eine Abbruchregel vereinbart wird und/oder daß die Breite des Weiterprüfungsbereiches nicht konstant ist, ist der von PÓLYA entwickelte Ansatz nicht anwendbar. Da die praktische Bedeutung dieses Lösungsweges offensichtlich nur gering ist, soll auf eine ausführlichere Darstellung hier verzichtet werden.

In dieser Arbeit sind statt dessen nur Rekursionsverfahren zu berücksichtigen, in denen für einen vorgegebenen Fehleranteil θ konkrete Wahrscheinlichkeiten zur Erreichung eines Punktes $P(x;y)$ ($x=0,1,\dots$; $y=1,2,\dots$; $x \leq y$) und davon ausgehend konkrete Werte für die OC-, ASN- und VSN-Funktion sowie für die Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ eines Folgetests

1 Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem PÓLYA, George, Exact formulas in the sequential analysis of attributes. University of California publications in mathematics, New Series, 1 (1948), S. 229-240; ROBINSON, Julia, A note on exact sequential analysis. University of California publications in mathematics, New Series 1 (1948), S. 241-246.

2 Vgl. PÓLYA, G., a.a.O., S. 236 ff.

3 Zum Begriff der rationalen Zahlen vgl. z. B. GELLERT, W., u. a. (Hrsg.), a.a.O., S. 78 ff.

4 Ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Kenngrößen der hier beschriebenen Folgetests ist in Abschnitt 4.4 dieser Arbeit darzustellen.

berechnet werden. Das "Herz" aller in der Literatur genannten Verfahren bildet eine Beziehung zur rekursiven Berechnung der oben genannten Wahrscheinlichkeiten; diese Beziehung kann entweder in Elementarschreibweise¹ oder in Matrizen-schreibweise² formuliert sein. Da die Matrizen-schreibweise jedoch im allgemeinen keine Vorteile gegenüber der Element-schreibweise der Rekursionsbeziehung bietet, soll in dieser Arbeit zunächst nur die Elementarschreibweise verwendet werden.³

Im folgenden Punkt 4.3.2 sind zunächst die Grundlagen der rekursiven Berechnung der Kenngrößen von Folgetests darzu-stellen. Bestandteil des Rekursionsverfahrens ist neben der eigentlichen Rekursionsformel auch eine Entscheidungsregel, mit deren Hilfe jeder Punkt $P(x;y)$, der mit einer Wahr-scheinlichkeit größer als Null von einem Zufallsweg er-reicht werden kann, einem der drei Entscheidungsbereiche (Weiterprüfungsbereich, Annahmebereich oder Rückweisebe-reich der Nullhypothese) zugeordnet wird. Als weiterer Be-standteil des Rekursionsverfahrens sind Beziehungen zur Berechnung der Werte der OC-, ASN- und VSN-Funktion und der Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ darzulegen. Wie zu zeigen sein wird, können ausgehend von dieser Verteilungsfunktion auch sehr einfach kritische Werte $y_c(\theta) = y_{1-\gamma}(\theta)$ für den entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang bestimmt werden, die bei einem Fehleranteil von θ in der Grundgesamtheit (im Prüfungsfeld) mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrschein-lichkeit von $1-\gamma$ nicht überschritten werden.

1 Vgl. z. B. AROIAN, L.A., Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 125 ff.; CORNELIUSSEN, LADD, a.a.O., S. 638 ff.; MAXIM, CULLEN, COOK, a.a.O., S. 104 ff.; SCHEIBER, V., Berechnung der OC- und ASN-Funktionen geschlossener Sequentialtests bei Binomialverteilung. Computing 8 (1971), S. 107 ff.

2 Vgl. CHOI, S.C., a.a.O., S. 159 ff.

3 Der Ansatz von CHOI in Matrizen-schreibweise ist speziell für Folgetests der Nullhypothese $\theta = 0,5$ gegen zwei Alter-nativhypothesen entwickelt worden und weist deshalb einige Besonderheiten auf, die im allgemeinen Fall nicht verwend-bar sind. Solche Tests werden beispielsweise in der Medizin zum Vergleich verschiedener Behandlungsmethoden verwendet; vgl. z. B. ARMITAGE, Peter, Restricted Sequential Proce-dures, Biometrika 44 (1957), S. 18 ff.; BROSS, I., Sequen-tial Medical Plans, Biometrics 8 (1952), S. 188 ff.; CHOI, S.C., a.a.O., S. 159 ff.; SCHEIBER, V., a.a.O., S. 107 ff.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 32 ff. und die jeweils dort angegebene Literatur.

Zur Demonstration der Leistungsfähigkeit des Rekursionsverfahrens sind in Punkt 4.3.3 die zu ausgewählten Beispielen errechneten Ergebnisse tabellarisch oder grafisch darzustellen. Als Beispiele sollen wieder die beiden im vorangegangenen Abschnitt 4.2 vorgegebenen Folgetests mit geschlossenen Bereichsgrenzen verwendet werden. Dabei soll hier, aufbauend auf den bisher gefundenen Ergebnissen, nur der Fall der Einzelauswertung berücksichtigt werden. Den Abschluß dieses Gliederungspunktes bildet eine Diskussion der errechneten Funktionswerte, wobei die in Abschnitt 3.5 vorgestellten Näherungslösungen sowie die in Abschnitt 4.2 gefundenen Schätzwerte als Vergleichsgrundlage dienen sollen.

In Punkt 4.3.4 schließlich soll gezeigt werden, wie mit Hilfe dieses Rekursionsverfahrens zu einem vorgegebenen Folgetest im Binomialmodell eine optimale Abbruchregel bestimmt werden kann, d. h. eine Abbruchregel, die die Einhaltung der zulässigen Fehlerwahrscheinlichkeiten gerade noch garantiert. Zur Beurteilung der mit einem solchen Test gegenüber anderen Typen von Testverfahren möglichen durchschnittlichen Einsparungen soll die ASN-Funktion eines derart "optimierten" Folgetests tabellarisch und grafisch dargestellt und mit den ASN-Funktionen entsprechender abgebrochener Einfach- und Doppeltests verglichen werden. Ein kurzes Resümee der Vorzüge und der Nachteile des Rekursionsverfahrens und ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen sind in Punkt 4.3.5 zu geben.

4.3.2 Grundlagen des Rekursionsverfahrens

Zur Vereinfachung der folgenden Herleitung soll zunächst unterstellt werden, daß die Stichprobenelemente einzeln entnommen und sofort geprüft werden und daß die Ergebnisse aufeinanderfolgender Entnahmen unabhängig sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Auffinden eines fehlerfreien Elementes beträgt somit $1-\theta$ und für das Auffinden eines fehlerhaften Elementes θ . Die Wahrscheinlichkeit $W(x;y)$ dafür, einen Punkt $P(x;y)$ zu erreichen, kann rekursiv als

$$\begin{aligned} W(x;y) &= W(x;y/\theta) = \zeta(x-1;y-1) \cdot \theta \cdot W(x-1;y-1) + \\ &\quad + \zeta(x;y-1) \cdot (1-\theta) \cdot W(x;y-1) \\ &\quad (x=0,1,\dots; y=1,2,\dots; x \leq y) \quad (4.32) \end{aligned}$$

bestimmt werden, wobei die Funktion $\zeta(x;y)$ den Wert 1 besitzt, wenn der Punkt $P(x;y)$ innerhalb des Weiterprüfungsbereiches des Folgetests liegt, und den Wert 0 sonst.¹ Wenn die Zuordnung eines bestimmten Punktes $P(x;y)$ zu einem der drei Entscheidungsbereiche eines Folgetests anhand der sogenannten "Entscheidungsregel 2" getroffen wird², ergibt sich der Wert dieser Funktion $\zeta(x;y)$ als

$$\zeta(x;y) = \begin{cases} 1 & \text{für } \max \{0; c(y)\} \leq x \leq \min \{y; d(y)\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.33)$$

Als Startwert dieser Rekursion wird $W(0;0) = 1$ definiert.

1 Vgl. MAXIM, CULLEN, COOK, a.a.O., S. 104 ff.

2 Vgl. S. 94 ff. dieser Arbeit.

Beispiele möglicher Rekursionsbeziehungen sind in der Abbildung 4.11 grafisch dargestellt.¹ Wie man aus dieser Abbildung erkennt, müssen zwar die "Ausgangspunkte" der rekursiven Berechnung innerhalb des Weiterprüfungsbereiches liegen, die "Zielpunkte" der Rekursion können jedoch innerhalb oder außerhalb des Weiterprüfungsbereiches liegen.

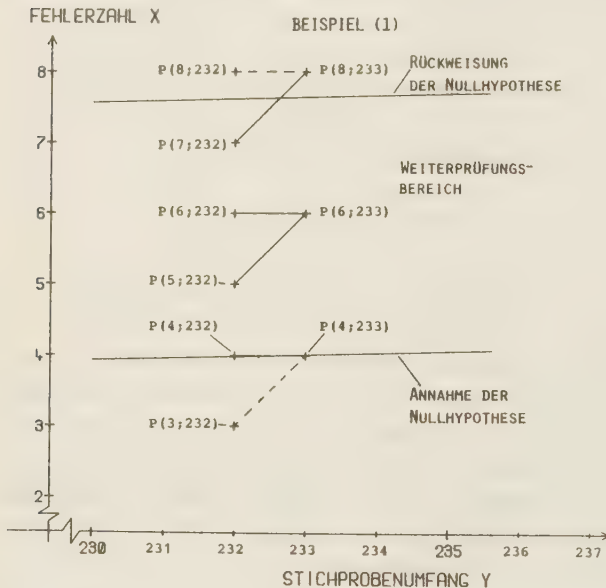


Abb. 4.11: Beispiele zur rekursiven Berechnung von Wahrscheinlichkeiten $W(x;y)$ beim Folgetest

Mit Hilfe der oben angegebenen Rekursionsbeziehung kann die Wahrscheinlichkeit $f_W(y)$ dafür, daß sich ein Zufallsweg beim Stichprobenumfang y im Weiterprüfungsbereich befindet, als

$$f_W(y) = f_W(y/\theta) = \sum_{c(y) < x < d(y)} W(x;y) \quad (y=1,2,\dots) \quad (4.34)$$

¹ Eine ähnliche Form der grafischen Darstellung geben MAXIM, CULLEN, COOK, a.a.O., S. 104; abweichende Formen der Darstellung findet man z. B. bei KRETSCHMER, F.-J., a.a.O., S. 48; SCHEIBER, V., a.a.O., S. 110.

bestimmt werden. Die Wahrscheinlichkeit $f_A(y)$, daß genau beim Stichprobenumfang y ein Zufallsweg den Annahmebereich der Nullhypothese erreicht, ergibt sich als

$$f_A(y) = f_A(y/\theta) = \sum_{x \leq c(y)} W(x; y) \quad (y=1, 2, \dots) \quad (4.35)$$

und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zufallsweg genau beim Stichprobenumfang y den Rückweisebereich der Nullhypothese erreicht, als

$$f_R(y) = f_R(y/\theta) = \sum_{x \geq d(y)} W(x; y) \quad (y=1, 2, \dots) \quad (4.36)$$

Zwischen den oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten besteht die Beziehung

$$f_W(y-1) = f_W(y) + f_A(y) + f_R(y) \quad (y=1, 2, \dots) \quad (4.37)$$

wobei $f_W(0)$ als Eins definiert ist.¹ Mit Hilfe dieser Beziehung können, wie noch zu zeigen sein wird, vereinfachte Formeln zur Berechnung von Werten der ASN- und VSN-Funktion sowie der Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs hergeleitet werden.

Wenn als Abbruchgrenze (truncation point, termination point) n_0 vorgegeben wird, wobei $1 \leq n_0 \leq \infty$ gelten muß, erhält man die Werte der OC-, ASN- und VSN-Funktion des entsprechenden Folgetests als²

1 Vgl. AROIAN, L.A., Applications of ..., a.a.O., S. 301; ders., Moments of ..., a.a.O., S. 1042.

2 Vgl. AROIAN, L.A., Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 126; ders., Applications ..., a.a.O., S. 301; ders., Moments of ..., a.a.O., S. 1042.

$$OC(\theta) = \sum_{y=1}^{n_0} f_A(y) , \quad (4.38)$$

$$ASN(\theta) = \sum_{y=1}^{n_0} y \cdot (f_A(y) + f_R(y)) \quad \text{und} \quad (4.39)$$

$$VSN(\theta) = \sum_{y=1}^{n_0} y^2 \cdot (f_A(y) + f_R(y)) - [ASN(\theta)]^2 . \quad (4.40)$$

Die Werte der Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs ergeben sich als

$$F(y/\theta) = \sum_{j=1}^y (f_A(j) + f_R(j)) \quad (y=1, 2, \dots, n_0) . \quad (4.41)$$

Rechentechnisch günstiger als diese Definitionsgleichungen sind unter Umständen die im folgenden angegebenen Gleichungen, deren Herleitung kurz hier skizziert werden soll: Ausgehend von (4.37) findet man

$$f_A(y) + f_R(y) = f_W(y-1) - f_W(y) \quad (y=1, 2, \dots, n_0) . \quad (4.42)$$

Wenn diese Beziehung in (4.39) eingesetzt wird, erhält man nach einigen Umformungen, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden soll,

$$ASN(\theta) = 1 + f_W(1) + f_W(2) + \dots + f_W(n_0 - 1) - n_0 \cdot f_W(n_0) \quad (4.43)$$

als Formel zur Berechnung eines Wertes der ASN-Funktion.¹ Unter der Voraussetzung, daß an der Stelle n_0 ein Abbruchkriterium $c^*(n_0)$ existiert, durch das alle Zufallswege, die die Abbruchgrenze erreichen, entweder dem Annahme- oder dem

¹ Vgl. zu diesen und den folgenden Ausführungen vor allem AROIAN, L.A., Applications of ..., a.a.O., S. 301; ders., Moments of ..., a.a.O., S. 1042.

Rückweisebereich der Nullhypothese zugerechnet werden, besitzt die Weiterprüfungswahrscheinlichkeit an der Stelle n_0 den Wert Null. Die Formel zur Berechnung der ASN-Funktion kann damit zu

$$\text{ASN}(\theta) = \sum_{y=0}^{n_0-1} f_W(y) \quad (4.44)$$

mit $f_W(0) = 1$ vereinfacht werden.

In ähnlicher Weise kann auch die Beziehung (4.40) zur Berechnung eines Wertes der VSN-Funktion zu

$$\text{VSN}(\theta) = \sum_{y=1}^{n_0} (y^2 - (y-1)^2) \cdot f_W(y-1) - n_0^2 \cdot f_W(n_0) - [\text{ASN}(\theta)]^2 \quad (4.45)$$

umgeformt werden.¹ Nach weiteren Vereinfachungen und unter Berücksichtigung von $f_W(n_0) = 0$ erhält man schließlich

$$\text{VSN}(\theta) = \sum_{y=0}^{n_0-1} (2y+1) \cdot f_W(y) - [\text{ASN}(\theta)]^2 \quad (4.46)$$

als alternative Formel zur Berechnung eines Wertes der VSN-Funktion. Die Beziehung (4.46) kann z. B. unter Verwendung von (4.44) noch weiter entwickelt werden; auf eine Darstellung dieser Möglichkeiten soll hier jedoch verzichtet werden.

¹ Eine allgemeine Lösung für beliebige zentrale Momente findet man bei AROIAN, L.A., Moments of ..., a.a.O., S. 1042. Zum Begriff der "zentralen Momente" vgl. z. B. FISZ, M., a.a.O., S. 90 ff.; KREYSZIG, E., a.a.O., S. 92 ff.; MENGES, Günter, Grundriß der Statistik, Teil 1: Theorie (2., erw. Aufl.), Opladen 1972, S. 214 ff.

Auch die Beziehung (4.41) zur Bestimmung der Werte der Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs kann ähnlich wie oben beschrieben umgeformt werden; man findet

$$F(y/\theta) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \\ 1 - f_W(y) & \text{für } y=1,2,\dots,n_0 \\ 1 & \text{für } y > n_0 \end{cases} \quad (4.47)$$

Die Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs ist also, wie zu erwarten war, das Komplement der Weiterprüfungswahrscheinlichkeit für diesen Stichprobenumfang.¹

Von dieser Formel für die Verteilungsfunktion ausgehend findet man die kritischen Stichprobenumfänge $y_c = y_{1-\gamma}(\theta)$, die mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit von $1-\gamma$ nicht überschritten werden, als Lösung der Ungleichungen

$$F(y_c-1/\theta) < 1-\gamma \leq F(y_c/\theta) \quad (4.48)$$

oder

$$f_W(y_c-1) > \gamma \geq f_W(y_c) \quad (4.49)$$

Für eine grafische Darstellung dieser kritischen Werte $y_{1-\gamma}(\theta)$ als Funktion des Fehleranteils θ im zugrunde liegenden Prüfungsfeld sind in der englischsprachigen Literatur die Begriffe "termination contours" oder "termination probability contours" geprägt worden.² Eine wörtliche deutsche Übersetzung erscheint hier nicht angebracht; in dieser Arbeit soll statt dessen zur Kennzeichnung solcher Kurven der Begriff "Vertrauensgrenzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs", kurz VES, verwendet werden.

1 Vgl. auch MAXIM, CULLEN, COOK, a.a.O., S. 105.

2 Vgl. CORNELIUSSEN, LADD, a.a.O., S. 639 ff.

Das Rekursionsverfahren ermöglicht also, wie hier gezeigt wurde, die Berechnung der wichtigsten Kenngrößen eines Folgetests. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist lediglich der relativ hohe Rechenaufwand, da zu jedem Punkt $P(x;y)$, der von einem Zufallsweg erreicht werden kann, die Rekursionsbeziehung (4.32) durchlaufen werden muß. Im Beispiel (1) mit einer Abbruchgrenze von $n_0 = 400$ sind etwa 1500 Durchläufe, im Beispiel (2) mit einer Abbruchgrenze von $n_0 = 500$ über 2000 Durchläufe durch diese Formel erforderlich. Die Anwendung dieses Rekursionsverfahrens ist deshalb nur mit Hilfe eines programmierbaren Rechners oder Computers sinnvoll möglich. Der Speicherbedarf des eigentlichen Rekursionsalgorithmus ist gering; relativ viel Speicherplatz erfordert dagegen die Abspeicherung der Zahlen $c(y)$ und $d(y)$ ($y=1,2,\dots,n_0$) sowie - falls gewünscht - eine Abspeicherung der Werte $F(y/\theta)$ ($y=1,2,\dots,n_0$) der Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs.

Zur Berechnung der Werte der ASN- und VSN-Funktion und der Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ bzw. der kritischen Werte y_c sind hier jeweils zwei Beziehungen aufgeführt worden, die vom Ergebnis her gleichwertig sind.¹ Welche davon jeweils rechentechnisch günstiger ist, hängt vom Aufbau des verwendeten Programms ab. Bei den Rechnungen zu dieser Arbeit sind in manchen Fällen jeweils beide Formeln parallel berücksichtigt worden, um so eventuelle Rechenungenauigkeiten abschätzen zu können. Dabei zeigte es sich, daß bei den in dieser Arbeit dargestellten Beispielen zwischen den alternativen Rechengängen keine erkennbaren Differenzen auftraten, wenn die Berechnungen mit sogenannter "doppelter Genauigkeit"² durchgeführt wurden.

¹ Auch der Wert $OC(\theta)$ der OC-Funktion kann auf zwei verschiedene Weisen berechnet werden. Neben (4.38) gilt auch

$$OC(\theta) = 1 - \sum_{y=1}^{n_0} f_R(y) ,$$

da hier geschlossene Bereichsgrenzen vorausgesetzt werden.

² Variablentyp REAL*8 bei Programmierung in FORTRAN IV.

Einfache Programme zur rekursiven Berechnung der Werte der OC- und ASN-Funktion eines Folgetests sind bereits an verschiedenen Stellen in der Literatur abgedruckt worden.¹ In dieser Arbeit wurde ein eigenes Programm verwendet, das in FORTRAN IV geschrieben ist. Die Annahme- und Rückweisekennzahlen werden dabei für vorgegebene Werte von s , h_1 , h_2 und n_0 sowie eine vorgegebene Form einer Abbruchregel² durch ein Unterprogramm berechnet. Dieses Programm ist im Anhang dieser Arbeit (Anhang 2) abgedruckt.

4.3.3 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

Um einen direkten Vergleich mit den bisher gefundenen Ergebnissen zu ermöglichen, wurden hier die beiden auf S. 40 dieser Arbeit eingeführten Beispiele mit den in Punkt 4.2.4 vorgegebenen Abbruchregeln zugrunde gelegt.³ Dabei wurde jedoch nur Einzelauswertung der Stichprobenelemente unterstellt. Als Grundlage einer grafischen Darstellung der OC-, ASN- und VSN-Funktionen sowie der VES-Funktionen (Funktionen der Vertrauensgrenzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs) für eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von $1 - \gamma = 0,95$ wurden die hier angegebenen Funktionswerte zu beiden Beispielen für jeweils 200 verschiedene Anteilswerte θ im Intervall $[0;1]$ mit dem oben dargestellten Verfahren rekursiv berechnet.⁴ Für ausgewählte Anteilswerte

1 Vgl. McPHERSON, Klim, Algorithm AS 67, The Evaluation of Absorption Probabilities in Sequential Binomial Sampling, Applied Statistics 23 (1974), S. 83 ff. und die dort angegebene Literatur. Einen ähnlichen Algorithmus für sequentielle Tests mit mehr als einer Alternativhypothese findet man bei LEVENTHAL, B., Algorithm AS 107, Operating Characteristics and Average Sample Number for a General Class of Sequential Sampling Plans, Applied Statistics 26 (1977), S. 98 ff.

2 Vgl. die Ausführungen auf S. 142 ff. dieser Arbeit.

3 Vgl. S. 214 dieser Arbeit.

4 Die Rechnungen wurden auf der IBM 3032 des Rechenzentrums der WWU Münster durchgeführt, die gesamte Rechenzeit betrug etwa 15 Sekunden.

$\theta = 0,010$; $0,025$ und $0,050$ sind diese Funktionswerte auch in der Tabelle 4.5 abgedruckt worden. Außerdem sind für diese drei Anteilswerte auch die Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ bestimmt und grafisch dargestellt worden.

Beispiel	Fehleranteil	OC(θ)	ASN(θ)	VSN(θ)	$y_{0,95}(\theta)$
(1)	0.010	0.971368	114.1760	3530.9078	233.
	0.025	0.529120	153.2856	10385.0717	368.
	0.050	0.048171	79.6868	4029.5123	204.
(2)	0.010	0.971358	149.6751	5107.8994	295.
	0.025	0.480681	199.0004	18429.0996	496.
	0.050	0.019692	84.0239	5049.3917	228.

Tab. 4.5: Ergebnisse der rekursiven Berechnung der Kenngrößen von Folgetests zu ausgewählten Beispielen mit Einzelauswertung

Bei einem Vergleich der in der Tabelle 4.5 abgedruckten Werte mit den in Abschnitt 3.5 näherungsweise berechneten Werten der OC- und ASN-Funktionen beider Beispiele¹ stellt man fest, daß die OC-Funktionen für Anteilswerte von $\theta = 0,010$ und $0,025$ deutlich und für $\theta = 0,050$ knapp über den bei konservativer Lösung berechneten Näherungswerten liegen, die vorgegebenen zulässigen Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster und zweiter Art werden jedoch in beiden Beispielen eingehalten. Die Werte der ASN-Funktionen liegen für $\theta = 0,010$ wenig, für $\theta = 0,025$ und $0,050$ jedoch deutlich über den entsprechenden Näherungswerten der Lösung von WALD. Die Ursachen dieser Abweichungen sind bereits an verschiedenen Stellen dieser Arbeit dargestellt worden.²

1 Vgl. Tabellen 3.13 und 3.15 auf den Seiten 158 bzw. 175 dieser Arbeit.

2 Vgl. S. 160 ff., S. 176 ff. und S. 184 dieser Arbeit und die jeweils dort angegebene Literatur.

Im Vergleich mit den in Tabelle 4.4 abgedruckten Simulationsergebnissen bestätigt sich, daß die experimentell gefundenen Punktschätzwerte von den exakten Werten durchweg abweichen; jedoch werden die exakten Werte von den berechneten Schätzintervallen (Konfidenzintervallen) in allen Fällen überdeckt.

Die OC- und ASN-Funktionen beider Beispiele sind in der Abbildung 4.12 auch grafisch dargestellt. Wenn eine große Zahl verschiedener Anteilswerte θ , d. h. eine kleine Schrittweite gewählt wird, können diese Funktionen ausreichend genau durch stetige Funktionen dargestellt werden. Bei der Auswertung von Simulationsexperimenten ist eine solche Darstellung wegen des Zufallscharakters der Ergebnisse dagegen nicht sinnvoll.

In der Abbildung 4.13 sind für beide Beispiele die VSN-Funktionen und die Wurzeln daraus, d. h. die Standardabweichung des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs, als Funktionen des Fehleranteils θ der Grundgesamtheit (des Prüfungsfeldes) grafisch dargestellt. Wie man sieht, ist die VSN-Funktion ähnlich wie die ASN-Funktion eingipflig und erreicht ein Maximum in der Nähe von $\theta = 0,025$.

Durch Vergleich der Abbildungen 4.12 und 4.13 erkennt man, daß der Variationskoeffizient, das ist das Verhältnis aus der Wurzel von $VSN(\theta)$ und $ASN(\theta)$,¹ bereits für kleine Fehleranteilswerte θ relativ groß ist. Für die beiden Beispiele erhält man an der Stelle $\theta = 0,010$ Werte des Variationskoeffizienten von 0,48 bzw. 0,52, d. h. die Standardabweichung des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs ist an dieser Stelle etwa halb so groß wie der Erwartungswert des Stichprobenumfangs. Mit wachsendem Fehleranteil nimmt der Wert des Variationskoeffizienten zunächst zu und erreicht an der Stelle $\theta = 0,050$ Werte von etwa 0,80 bzw.

¹ Zum Begriff des Variationskoeffizienten vgl. z. B. BAMBERG, BAUR, a.a.O., S. 21 f.; BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 22.

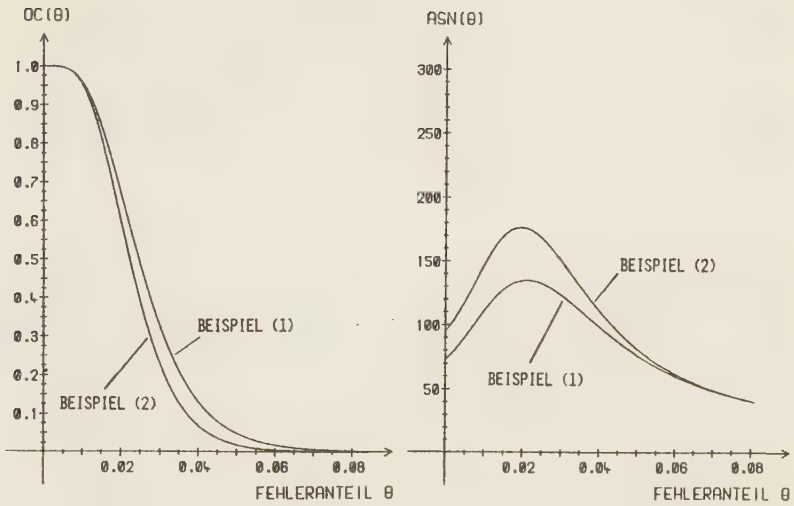


Abb. 4.12: OC- und ASN-Funktionen ausgewählter Folgetests

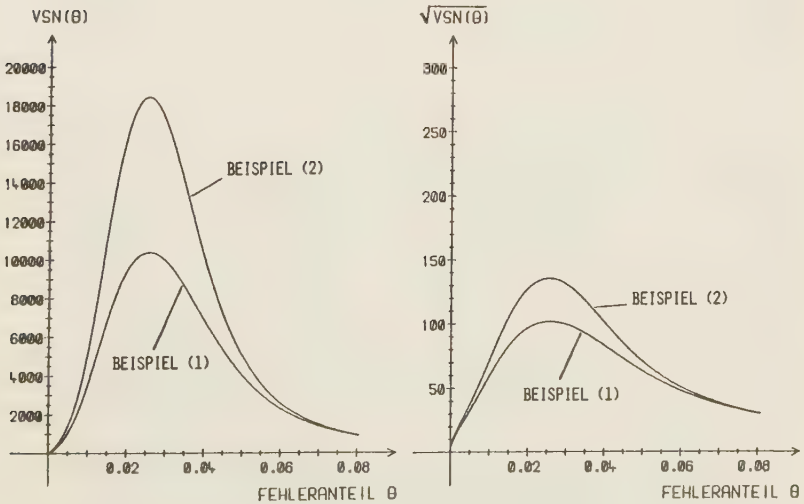


Abb. 4.13: VSN-Funktionen und Standardabweichungen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs ausgewählter Folgetests

0,85. Anschließend nimmt der Wert des Variationskoeffizienten langsam wieder ab. Auch dieses Ergebnis spricht gegen eine Approximation der Verteilung $F(y/\theta)$ des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs durch eine Exponentialverteilung, wie dies in der Literatur vereinzelt vorgeschlagen wird¹, denn die Exponentialverteilung weist einen Variationskoeffizienten von 1,0 auf.²

Die Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ zu beiden Beispielen für ausgewählte Fehleranteile $\theta = 0,010; 0,025$ und $0,050$ sind in den Abbildungen 4.14 und 4.15 grafisch dargestellt. Auch diese Abbildungen bestätigen die bereits in Abschnitt 4.2 dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse.³ Die durch den diskreten Charakter der Annahme- und der Rückweisegrenze bedingten typischen Verläufe dieser Verteilungsfunktionen sind in den Abbildungen 4.14 und 4.15 für alle berücksichtigten Fehleranteile sehr gut zu erkennen, da diese Ergebnisse - im Gegensatz zu den Ergebnissen von Simulationsexperimenten - keine Zufallseinflüsse enthalten. Aus diesen Abbildungen können auch die Vertrauensgrenzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs auf grafischem Wege sehr einfach bestimmt werden.

Die Funktionen der Vertrauensgrenzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs (VES-Funktionen) der beiden Beispiele zu einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $1-\gamma = 0,95$ sind in der Abbildung 4.16 als Funktionen des Fehleranteiles θ grafisch dargestellt. Auffällig ist vor allem der treppenförmige Verlauf dieser Funktionen vor allem bei kleinen Fehleranteilen. Dieser charakteristische Verlauf ist ebenfalls wieder durch den diskreten Charakter der Annahmegrenze eines Folgetests zur Attributprüfung bedingt.

1 Vgl. S. 185 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. z. B. HASTINGS, PEACOCK, a.a.O., S. 56 ff.

3 Vgl. S. 224 ff. dieser Arbeit.

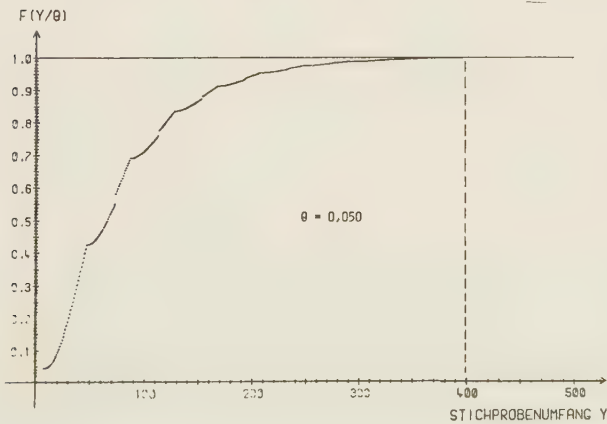
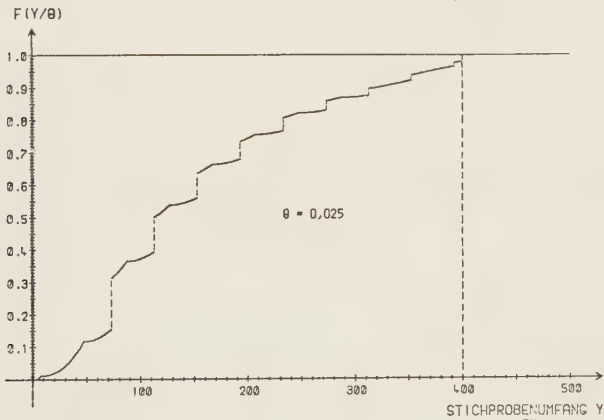
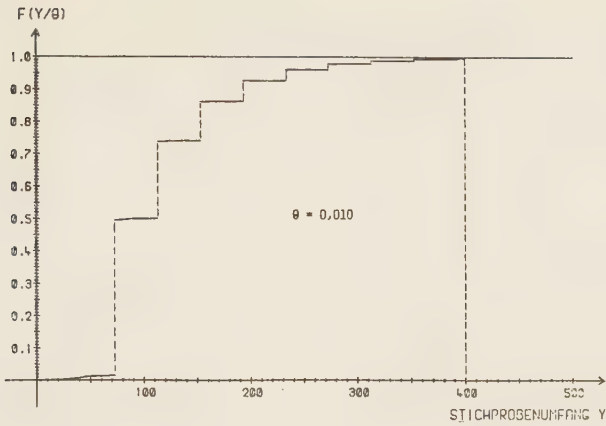


Abb. 4.14: Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ zu Beispiel (1)

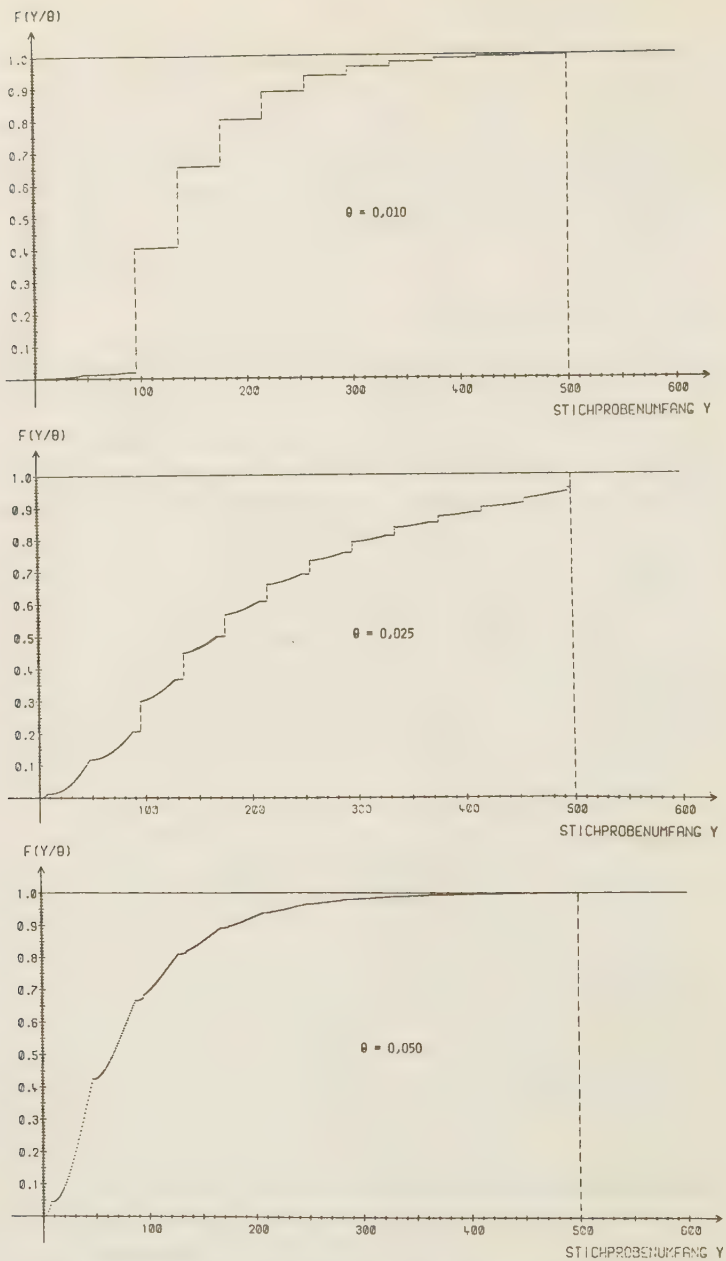


Abb. 4.15: Verteilungsfunktionen $F(y/\theta)$ zu Beispiel (2)

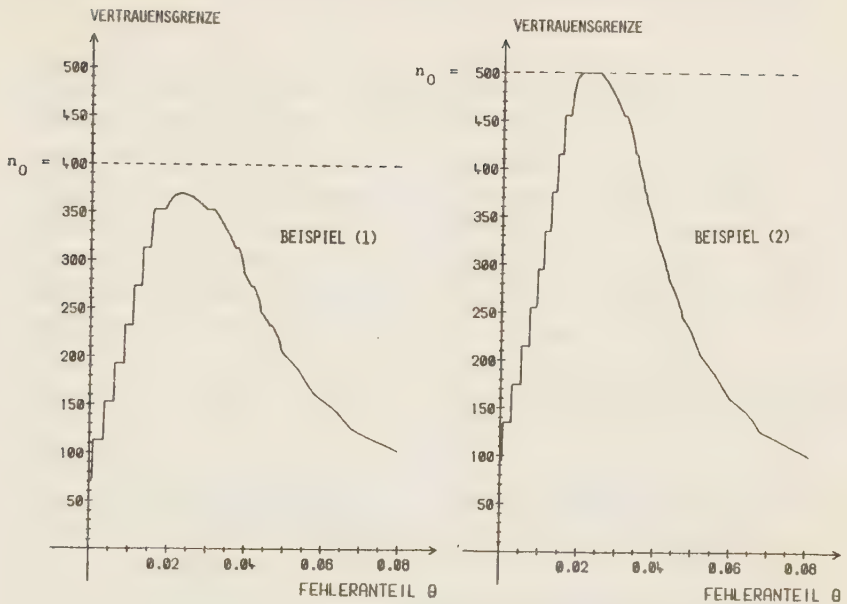


Abb. 4.16: Vertrauensgrenzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs zu ausgewählten Folgetests ($1 - \gamma = 0,95$)

Bemerkenswert ist weiterhin, daß für Fehleranteile in der Nähe von $\theta = 0,25$ diese Vertrauensgrenzen - vor allem in Beispiel (2) - fast die hier sehr großzügig gewählten Abbruchgrenzen n_0 erreichen. Der Wert dieser Vertrauensgrenzen beträgt in beiden Beispielen für Fehleranteile größer als 0,010 das Zwei- bis Dreifache des entsprechenden Wertes der ASN-Funktion.

Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß dieser treppenförmige Anstieg auch bei anderen Sicherheitswahrscheinlichkeiten $1 - \gamma$ zu beobachten ist. Bei Werten von $1 - \gamma > 0,975$ fallen die Vertrauensgrenzen zu beiden Beispielen für mittlere Anteilswerte θ mit den jeweiligen Abbruchgrenzen n_0 zusammen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abbruchgrenze n_0

erreicht wird, ist also in beiden hier berücksichtigten Beispielen für alle Werte von θ kleiner als 0,025 bzw. 2,5 %. Die bisher dargestellten Ergebnisse gelten jedoch nur, wenn die sogenannte "optimierte" Abbruchregel¹ zugrunde gelegt wird. Bei "unwirtschaftlichem" Abbruch würde man dagegen höhere als die angegebenen Wahrscheinlichkeiten für die Erreichung der Abbruchgrenze n_0 und damit auch höhere Werte der ASN-Funktion und der VES-Funktion erhalten. Auf eine weitergehende Darstellung dieser Ergebnisse sei jedoch verzichtet, da dies hier zu weit führen würde. Die Einflüsse einer Abbruchregel und Möglichkeiten zur Auswahl einer "optimalen" Abbruchregel sind dagegen im folgenden Punkt 4.3.4 näher zu untersuchen.

4.3.4 Bestimmung eines "optimal" angepaßten Folgetests mit Hilfe des Rekursionsverfahrens

In den vorangegangenen Ausführungen ist festgestellt worden, daß die zu den beiden Beispielen (1) und (2) gewählten Abbruchregeln, die durch eine Abbruchgrenze von $n_0 = 400$ bzw. $n_0 = 500$ und ein durch Gleichung (3.98) bestimmtes Abbruchkriterium $c^* = c^*(n_0)$ gekennzeichnet sind, zu zulässigen Folgetests führen, d. h. daß die Einhaltung der vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten gewährleistet ist. Die Operationscharakteristik liegt in beiden Beispielen bei einem Anteilswert von $\theta = \theta_0 = 0,010$ sogar deutlich über dem jeweils geforderten Wert von $1-\alpha$, oder - anders formuliert - die Rückweisewahrscheinlichkeiten an dieser Stelle sind in beiden Beispielen mit $1-OC(\theta_0) = 0,0286$ deutlich geringer als der höchstzulässige Wert von $\alpha = 0,05$. Der Grund dafür liegt, wie bereits mehrfach erwähnt wurde, in der Notwendigkeit einer (konservativen) Rundung der exakt berechneten Bereichsgrenzen auf ganze Zahlen bzw. in

¹ Vgl. zu den folgenden Ausführungen S. 143 ff. dieser Arbeit.

der damit verbundenen möglichen Überschreitung der Bereichsgrenzen.¹

Ein möglicher Ansatz zur besseren Anpassung eines Folgetests an die vorgegebenen Werte von α und β könnte die sogenannte "Randomisierung" sein, bei der die Entscheidung teilweise vom Ausgang eines Zufallsexperiments abhängig gemacht wird.² Die Verwendung von randomisierten Tests soll hier jedoch ausgeschlossen werden, da sie bei der Vielzahl möglicher Entscheidungen in einem Folgetest einen recht hohen Aufwand erfordern würden.

Eine andere Möglichkeit zur Anpassung besteht in der Verengerung der Breite des Weiterprüfungsbereiches durch die Vorgabe von Ordinatenabschnitten h_1 und/oder h_2 , die kleiner als die durch (3.32) bzw. (3.33) bestimmten Werte sind. Unter einschränkenden Voraussetzungen sind theoretische Lösungen dieses Problems von FERGUSON und BARTENSCHLAGER entwickelt worden.³ Die dort gefundenen Ergebnisse sind jedoch nicht ohne weiteres auf den Folgetest im Binomialmodell übertragbar und sollen deshalb hier nicht dargestellt werden. Besser angepaßte Werte für h_1 und h_2 können dagegen durch ein "trial and error"-Suchverfahren bestimmt werden, bei dem nach jedem Schritt die Werte $OC(\theta_0)$ und $OC(\theta_A)$ mit dem oben beschriebenen Verfahren rekursiv berechnet und mit den vorgegebenen Werten von $1-\alpha$ bzw. β verglichen werden müssen. Da der hierzu erforderliche Rechenaufwand jedoch relativ hoch ist, soll hier darauf verzichtet werden.

1 Vgl. S. 162 ff., S. 184 und S. 218 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Zum Begriff des "randomisierten Tests" vgl. z. B. LEHMANN, E.L., a.a.O., S. 62 ff.; SCHAICH, E., a.a.O., S. 199.

3 Vgl. FERGUSON, Thomas S., Mathematical Statistics, A Decision Theoretic Approach, New York, London 1967, S. 361 ff.; BARTENSCHLAGER, H., Bestimmung der Schranken des Sequentialquotiententests zu gegebenen Fehlers erster und zweiter Art. In: HENN, Rudolf (Hrsg.), Operations Research Verfahren VII (Methods of Operations Research VII), Meisenheim am Glan 1977, S. 54 ff.

Sinnvoller als die hier angesprochenen Möglichkeiten zur Korrektur der Lage der Bereichsgrenzen dürfte für Anwendungen im Prüfungswesen die Bestimmung einer besser angepaßten ("optimalen") Abbruchregel sein. Die hier gefundenen Ergebnisse deuten darauf hin, daß in beiden in dieser Arbeit verwendeten Beispielen die Abbruchgrenzen n_0 niedriger als bisher angesetzt werden können: Durch eine solche Verminderung steigen ceteris paribus die Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster und/oder zweiter Art, die OC-Funktion wird flacher.¹ Eine solche Anpassung bewirkt, wie zu zeigen sein wird, einen flacheren Verlauf der ASN-Funktion für mittlere Fehleranteile sowie vor allem eine deutliche Absenkung der Obergrenze des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs, die ja für Zwecke der Prüfungsplanung besondere Bedeutung besitzt.² Zudem ist eine solche Anpassung technisch sehr einfach möglich.

Ein Verfahren zur Bestimmung einer Abbruchregel ($n_0; c^*$) zu einem Folgetest mit den Koeffizienten s , h_1 und h_2 , die gerade noch die Einhaltung der zulässigen Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster und zweiter Art garantiert, und die mit diesem Verfahren gefundenen Ergebnisse sind im folgenden kurz darzustellen. Die Verwendung eines "trial and error"-Suchverfahrens, d. h. Vorgabe bestimmter Werte für n_0 und c^* , Berechnung der entsprechenden Annahmewahrscheinlichkeiten $OC(\theta_0)$ und $OC(\theta_A)$ und eventuell Korrektur von n_0 und/oder c^* , ist hier wegen des damit verbundenen sehr hohen Rechenaufwandes nicht sinnvoll.

Die Annahmewahrscheinlichkeiten für alle möglichen Abbruchregeln ($n_0; c^*$) ($c^*=0,1,\dots$; $n_0=1,2,\dots$) zu einem vorgegebenen Fehleranteil θ des Prüfungsfeldes können jedoch in einem einzigen Durchlauf eines entsprechend modifizierten

1 Vgl. S. 145 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. S. 185 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

Rekursionsverfahrens direkt als Werte der im folgenden zu definierenden Funktion $S(c^*; n_0; \theta)$ berechnet werden. Vorausgesetzt wird, daß das Abbruchkriterium c^* an der Stelle n_0 nur Werte innerhalb des Weiterprüfungsbereiches oder auf der Annahmegrenze des Folgetests annehmen kann.¹ Es muß also die Bedingung (4.26)

$$c(n_0) \leq c^* < d(n_0) \quad (n_0=1, 2, \dots)$$

erfüllt sein; dabei bezeichnen $c(n_0)$ und $d(n_0)$ die durch die Beziehungen (3.29 ff.) gegebenen Annahme- und Rückweisenzahlen an der Stelle n_0 . Hiermit gleichbedeutend ist die Bedingung

$$r(c^*) > n_0 \geq a(c^*) \quad (c^*=0, 1, \dots), \quad (4.50)$$

in der $a(c^*)$ und $r(c^*)$ die durch die Beziehungen (3.42 ff.) bestimmten Annahme- und Rückweiskennzahlen für c^* Fehler in der Stichprobe bezeichnen.²

Unter den hier angegebenen Voraussetzungen erhält man, wenn zusätzlich

$$F_A(n_0) = \sum_{y=1}^{n_0} f_A(y) \quad (n_0=1, 2, \dots) \quad (4.51)$$

eingeführt wird, die Werte der Funktion $S(c^*; n_0; \theta)$ als

$$S(c^*; n_0; \theta) = \begin{cases} F_A(n_0) & \text{für } c^* = c(n_0) \\ F_A(n_0) + \sum_{x < c^*} W(x; n_0) & \text{für } c(n_0) < c^* < d(n_0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(c^*=0, 1, \dots; n_0=1, 2, \dots), \quad (4.52)$$

¹ Vgl. S. 142 ff. und S. 208 f. dieser Arbeit.

² Im Falle einer gruppenweisen Auswertung der Elemente sind diese Kennzahlen wie auf S. 132 und S. 206 dieser Arbeit angegeben zu runden.

wobei $W(x; n_0)$ die anhand der Beziehung (4.32) rekursiv berechneten Wahrscheinlichkeiten zur Erreichung eines Punktes $P(x; n_0)$ im Weiterprüfungsbereich sind.

Zulässig sind entsprechend den Bedingungen (2.3) und (2.4) diejenigen Abbruchregeln $(n_0; c^*)$, für die die beiden Bedingungen

$$S(c^*; n_0; \theta_0) \geq 1 - \alpha \quad (4.53)$$

und

$$S(c^*; n_0; \theta_A) \leq \beta \quad (4.54)$$

erfüllt sind. Ähnlich wie bei der Bestimmung zulässiger Einfachtests¹ erweist es sich auch hier als zweckmäßig, zu vorgegebenen Werten von c^* ($c^*=0,1,\dots$) jeweils die größtmöglichen und die kleinstmöglichen Werte der Annahmegränze n_0 zu ermitteln, die die beiden Bedingungen (4.53) und (4.54) gerade noch erfüllen.

Zu einem vorgegebenen Wert von c^* erhält man den größten zulässigen Wert $n_{\max} \leq a(c^*)$ für die Abbruchgrenze aus der Beziehung

$$S(c^*; n_{\max}; \theta_0) \geq 1 - \alpha > S(c^*; n_{\max} + 1; \theta_0) ; \quad (4.55)$$

den kleinsten zulässigen Wert $n_{\min} > r(c^*)$ findet man aus der Beziehung

$$S(c^*; n_{\min}; \theta_A) \leq \beta < S(c^*; n_{\min} - 1; \theta_A) . \quad (4.56)$$

Alle ganzzahligen Werte von n_0 , die die Bedingung

$$r(c^*) < n_{\min} \leq n_0 \leq n_{\max} \leq a(c^*) \quad (c^*=0,1,\dots) \quad (4.57)$$

¹ Vgl. S. 39 ff. dieser Arbeit.

erfüllen, sind dann zulässige Abbruchgrenzen zu diesem Wert von c^* . Wenn ein solcher ganzzahliger Wert für n_0 nicht existiert, ist der gewählte Wert für c^* kein zulässiges Abbruchkriterium; in diesem Fall ist der nächstgrößere Wert für c^* ($c^*=0,1,\dots$) zu verwenden.

Die hier angegebenen Grenzen $n_{\min}$ und $n_{\max}$ können mit einem geringfügig modifizierten Rekursionsalgorithmus leicht bestimmt werden; dazu sind lediglich zwei Durchläufe, einer zu einem angenommenen Fehleranteilswert von θ_0 und einer zu einem angenommenen Fehleranteilswert von θ_A , erforderlich. Die zu den beiden hier vorgegebenen Beispielen (bei konservativer Bestimmung der Bereichsgrenzen) errechneten zulässigen Abbruchgrenzen zu vorgegebenen Werten des Abbruchkriteriums c^* sind in der Tabelle 4.6 abgedruckt; zusätzlich sind diese Grenzen auch in der Abbildung 4.17 grafisch dargestellt.

Abbruch- kriterium	zulässige Abbruchgrenzen n_0	
	Beispiel (1)	Beispiel (2)
≤ 4	-	-
5	[244, 273]	-
6	[277, 313]	[306, 335]
7	[307, 353]	[340, 376]
8	[335, 393]	[373, 416]
9	[361, 433]	[404, 456]
10	[384, 473]	[432, 496]
11	[402, 513]	[459, 536]
12	[408, 553]	[484, 576]
13	[448, 593]	[508, 616]
:	:	:
:	:	:

Tab. 4.6: Zulässige Abbruchregeln von Folgetests zu ausgewählten Beispielen

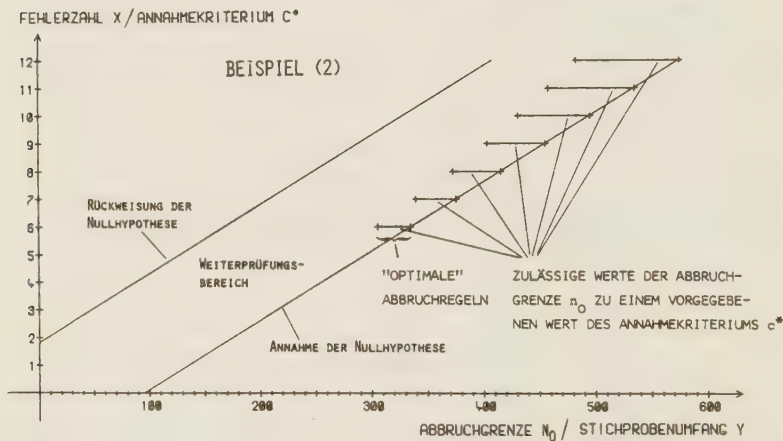
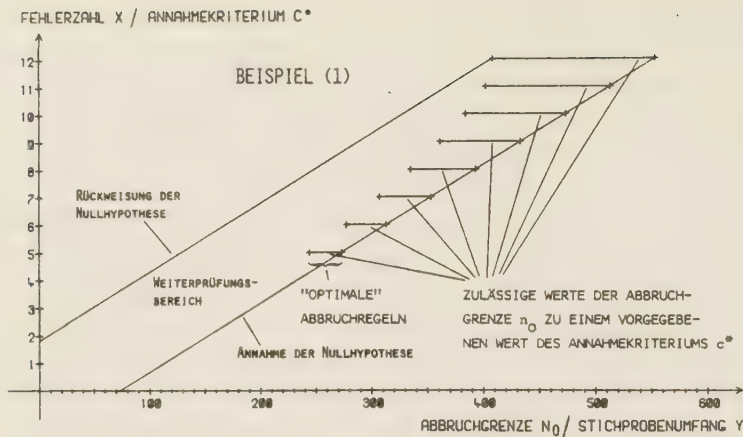


Abb. 4.17: Zulässige und optimale Abbruchregeln von Folgetests zu ausgewählten Beispielen

Aus der Tabelle 4.6 bzw. der Abbildung 4.17 erkennt man, daß zulässige Abbruchregeln zu Beispiel (1) nur für Werte des Abbruchkriteriums c^* größer oder gleich 5 und zu Beispiel (2) für Werte größer oder gleich 6 existieren. Mit steigenden Werten für c^* nehmen in beiden Beispielen sowohl die Werte für die untere und obere Intervallgrenze als auch die Breite des Intervalls zu. Auffällig ist vor allem, daß

die zulässigen Abbruchregeln ($n_0; c^*$) vor allem am unteren Rande des Weiterprüfungsbereiches oder sogar auf der Annahmegrenze selbst liegen. In beiden hier gewählten Beispielen stimmen für alle zulässigen Werte von c^* die oberen Intervallgrenzen mit den entsprechenden Annahmekennzahlen $a(c^*)$ überein.

Für diese auf den ersten Blick überraschende Tatsache, daß die zulässigen Abbruchregeln vorwiegend am unteren Rande des Weiterprüfungsbereiches oder auf der Annahmegrenze selbst liegen, läßt sich die folgende Erklärung finden: Die durch den diskreten Charakter der Zufallswege bei Attributprüfung bedingten möglichen Überschreitungen der exakten Rückweisegrenze sind bei kleinen Werten für die Steigung s der Bereichsgrenzen ($0 < s < 0,5$) größer als die möglichen Überschreitungen der Annahmegrenze und damit ist die Rückweisewahrscheinlichkeit tendenziell kleiner bzw. die Annahmewahrscheinlichkeit der Nullhypothese tendenziell größer als angenommen.¹ Diese Verschiebung der Annahmekennlinie nach oben kann durch einen im Verhältnis zur Abbruchgrenze n_0 sehr kleinen Wert des Abbruchkriteriums c^* teilweise wieder ausgeglichen werden, d. h. durch einen Wert, der am unteren Rande des Weiterprüfungsbereiches liegt.

Von den verschiedenen zulässigen Abbruchregeln zu einem bestimmten Beispiel kann, analog zur Bestimmung eines optimalen Einfachtests², nur eine Abbruchregel mit dem kleinstmöglichen Wert für das Abbruchkriterium c^* optimal sein; alle anderen Abbruchregeln würden im Falle eines Abbruchs einen größeren (durchschnittlich) entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang erfordern. Zu Beispiel (1) kann also nur eine der Abbruchregeln mit $c^*=5$ und $244 \leq n_0 \leq 273$ und zu Beispiel (2) nur eine der Abbruchregeln mit $c^*=6$ und $306 \leq n_0 \leq 335$ optimal sein. Bei der Auswahl eines Wertes für n_0 aus einem dieser Intervalle gelten die gleichen

1 Vgl. S. 163 ff. dieser Arbeit.

2 Vgl. S. 41 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

Überlegungen wie im Falle des Einfachtests analog.¹ Hier sollen im weiteren Verlauf "mittlere" Werte für n_0 gewählt werden, nämlich zu Beispiel (1) $n_0=250$ und zu Beispiel (2) $n_0=325$. Diese beiden Werte sind auch dann verwendbar, wenn eine Auswertung in Gruppen von jeweils $n_d=25$ Elementen beabsichtigt ist. Die Entscheidungsbereiche der beiden Beispiele bei Verwendung der Abbruchregeln (250;5) bzw. (325;6) und "optimierter" Abbruchentscheidung² sind in der Abbildung 4.18 dargestellt, dabei wurden die Bereichsgrenzen der Einfachheit halber als Geraden gezeichnet. Bei der Bestimmung der Koeffizienten s , h_1 und h_2 wurde, wie auch in den vorangegangenen Abschnitten dieser Arbeit, die sogenannte "konservative Lösung"³ zugrunde gelegt.

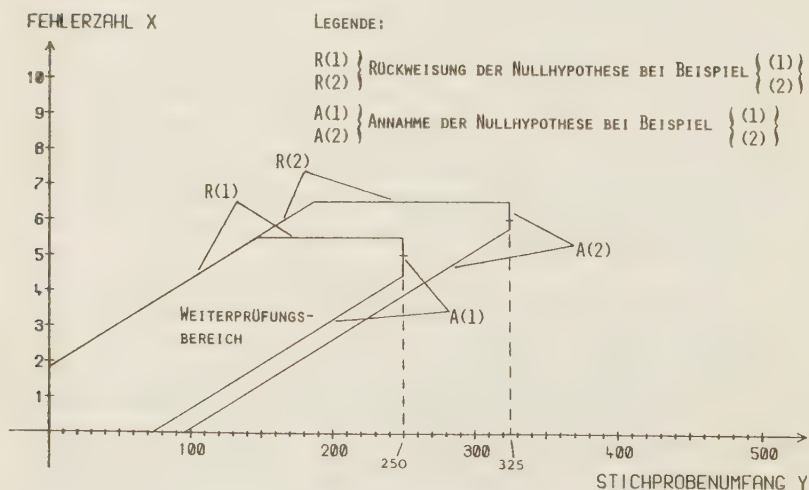


Abb. 4.18: Entscheidungsbereiche von Folgetests mit optimaler Abbruchregel zu ausgewählten Beispielen

¹ Vgl. S. 42 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

² Vgl. S. 143 ff. dieser Arbeit.

³ Vgl. S. 86 ff. und S. 94 ff. dieser Arbeit.

Die Werte der OC-, ASN- und VES-Funktionen der beiden Beispiele mit optimalen Abbruchregeln sind für ausgewählte Fehleranteile von $\theta = 0,010$; $0,025$ und $0,050$ in der Tabelle 4.7 abgedruckt. Wie man durch einen Vergleich mit den in Tabelle 4.5 angegebenen Werten erkennt, liegen, wie zu erwarten war, bei optimaler Abbruchregel die Werte der ASN-, VSN- und VES-Funktionen vor allem für einen Anteilswert von $\theta = 0,025$ deutlich unter den entsprechenden Werten bei vorsichtig bemessener Abbruchregel.

Beispiel	θ	OC(θ)	ASN(θ)	VSN(θ)	$y_{0,95}(\theta)$
(1)	0.010	0.957153	111.2861	2552.4773	233.
	0.025	0.485660	132.5043	4643.2253	250.
	0.050	0.048929	76.4754	2954.5746	188.
(2)	0.010	0.952581	146.5845	3847.6127	295.
	0.025	0.390336	168.0638	7770.5593	308.
	0.050	0.019135	81.4387	3916.0511	215.

Tab. 4.7: Ergebnisse der rekursiven Berechnung der Kenngrößen von "optimal angepaßten" Folgetests

Im Vergleich mit den in den Tabellen 3.13 und 3.15 abgedruckten Näherungswerten für die OC- und ASN-Funktionen bei konservativer Lösung stellt man eine recht gute Übereinstimmung der Eigenschaften der hier gefundenen angepaßten Tests mit den theoretisch erwarteten Ergebnissen fest. Die ASN-Funktionen $ASN(\theta)$ der angepaßten Tests verlaufen in beiden Beispielen jedoch flacher als die Näherungslösungen $ASN(\theta)$ nach WALD: Der Wert der Funktion $ASN(\theta)$ ist für einen Anteilswert von $\theta = 0,010$ nur wenig größer als $ASN(\theta)$, für einen Anteilswert von $\theta = 0,025$ etwas kleiner und für $\theta = 0,050$ deutlich größer als $ASN(\theta)$. Dies wird auch aus der Abbildung 4.19 deutlich, in der neben den hier genannten zwei ASN-Funktionen zu beiden

Beispielen auch die ASN-Funktionen entsprechender abgebrochener Einfach- und Doppeltests eingezeichnet sind.

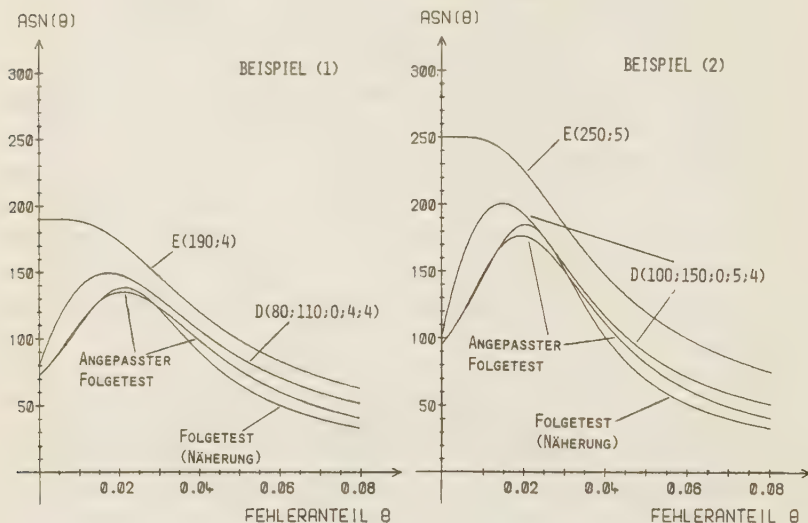


Abb. 4.19: ASN-Funktionen von "optimal angepaßten" Folgetests sowie ASN-Funktionen abgebrochener Einfach- und Doppeltests zu ausgewählten Beispielen

Die hier bestimmten optimal angepaßten Folgetests besitzen, wie man aus der Abbildung 4.19 erkennt, über den gesamten hier dargestellten Bereich von $0 \leq \theta \leq 0,1$ geringere durchschnittliche Stichprobenumfänge als die zu diesen Beispielen ausgewählten abgebrochenen Einfach- oder Doppeltests. Der beim Folgetest maximal erforderliche Stichprobenumfang n_0 ist jedoch in beiden Beispielen um etwa 30 % größer als der maximale Stichprobenumfang eines entsprechenden Einfach- oder Doppeltests; ebenso ist die Annahmehzahl $c^*(n_0)$ in beiden Beispielen größer als die Annahmehzahl c eines

entsprechenden Einfachtests oder die Annahmezahl c_2 eines entsprechenden Doppeltests. Zu klären bleibt, wie weit diese Ergebnisse verallgemeinert werden können. Man kann zeigen, daß n_0 nicht kleiner als der kleinstmögliche Umfang eines entsprechenden Einfachtests und c^* nicht kleiner als die Annahmezahl c eines entsprechenden Einfachtests sein können¹ und daß die zulässigen Werte für c und n_0 ceteris paribus um so größer sind, je enger die Annahme- und die Rückweisegrenze zusammenliegen. Auf eine Darstellung dieser Herleitungen sowie auf die Ableitung schärferer Aussagen muß im Rahmen dieser Arbeit jedoch verzichtet werden.

Durch eine Anpassung der Lage der Bereichsgrenzen, wie sie auf Seite 250 dieser Arbeit vorgeschlagen wurde, könnte vermutlich der tatsächliche Verlauf der ASN-Funktion vor allem für große Fehleranteile θ besser an die von WALD bestimmte Näherung $ASN(\theta)$ angepaßt werden. Dafür müßte jedoch in Kauf genommen werden, daß eine zulässige Abbruchgrenze n_0 wesentlich höher liegen würde als in den hier bestimmten Tests und daß als Folge davon auch die Werte der VSN- und der VES-Funktion für mittlere Fehleranteile wesentlich über den Werten der hier bestimmten Folgetests liegen würden. Die Bestimmung angepaßter Koeffizienten h_1 und/oder h_2 der Bereichsgrenzen erscheint also vor allem für Anwendungen im Prüfungswesen weniger gut geeignet als die Bestimmung angepaßter Abbruchregeln, da durch eine hohe Variabilität des Stichprobenumfangs bzw. durch hohe Werte für die Vertrauensgrenzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs eine Termin- und Kostenplanung wesentlich erschwert wird.² Zudem ist die Bestimmung angepaßter Koeffizienten h_1 und/oder h_2 wesentlich rechenaufwendiger als die hier empfohlene Bestimmung optimal angepaßter Abbruchregeln.

1 Der Beweis hierfür kann analog wie beim Doppelstichprobenverfahren geführt werden; vgl. S. 73 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. S. 185 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

4.3.5 Zusammenfassung und Ausblick

Das hier dargestellte Rekursionsverfahren ist eine sehr leistungsfähige Technik, die für vorgegebene Fehleranteile θ die Berechnung einer Vielzahl von Kenngrößen eines beliebigen geschlossenen Folgetests erlaubt. Diese Technik eignet sich für alle sequentiellen Tests, deren Bereichsgrenzen durch Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ ($y=1,2,\dots,n_0$) gegeben sind, also für Folgetests nach WALD mit beliebiger Abbruchregel ebenso wie für Einfach- und Doppeltests mit vorzeitigem Abbruch bei Erreichen der Rückweise- und/oder Annahmegrenze ("curtailed single sampling" bzw. "curtailed double sampling").¹ Bei einer entsprechenden Modifikation des Rekursionsverfahrens können auch Tests mit einer Entnahme in Gruppen berücksichtigt werden. Auf diese Möglichkeiten soll jedoch wegen des begrenzten Umfangs dieser Arbeit verzichtet werden.

In den bisherigen Ausführungen zum Rekursionsverfahren ist die Binomialverteilung als Verteilung der Fehlerzahl in der Stichprobe unterstellt worden. Diese Verteilung kann, wie in Abschnitt 2.4 dieser Arbeit festgestellt wurde, in den meisten Fällen als modellentsprechende Verteilung angenommen werden.² Wenn jedoch Hypothesen über die konkrete Fehlerzahl in einem Prüfungsfeld vom Umfang N zu testen sind, ist die Hypergeometrische Verteilung anzuwenden. In diesem Fall ist lediglich die eigentliche Rekursionsformel abzuändern; alle übrigen Elemente des Rekursionsverfahrens bleiben unverändert. Anstelle von (4.32) ist im Modell der Hypergeometrischen Verteilung

1 Vgl. Abschnitt 2.5 dieser Arbeit.

2 Vgl. S. 32 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

$$\begin{aligned}
 W(x;y) &= \zeta(x-1;y-1) \cdot \frac{M-x+1}{N-y+1} W(x-1,y-1) + \\
 &+ \zeta(x;y-1) \cdot \frac{N-M-y+x+1}{N-y+1} W(x;y-1) \\
 (x=0,1,\dots,M; y=1,2,\dots,N; x \leq y)
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

zu setzen, wobei der Wert der Funktion $\zeta(x;y)$ durch die Beziehung (4.33) bestimmt ist und der Wert für M als $M = N \cdot \theta$ berechnet wird. Anzunehmen ist, daß auch im Modell der Hypergeometrischen Verteilung - bedingt durch die möglichen Überschreitungen der exakten Bereichsgrenzen - Abbruchregeln und/oder enger zusammenliegende Bereichsgrenzen bestimmt werden können, die eine bessere Anpassung an die zulässigen Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster bzw. zweiter Art bieten als die in Punkt 3.3.3 dieser Arbeit angegebenen Bereichsgrenzen. Eine Klärung dieses Problems ist jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich.

Mit Hilfe geeigneter Verfahren zur numerischen Integration ist das hier beschriebene Rekursionsverfahren auch bei stetigen Stichprobenverteilungen, z. B. im Falle einer Normalverteilung mit bekannter Varianz, anwendbar.¹ Da Tests stetiger Merkmale in dieser Arbeit jedoch nicht behandelt werden, soll auf diese Möglichkeiten nicht weiter eingegangen werden.

Die hier mit dem Rekursionsverfahren zu ausgewählten Folgetests im Binomialmodell durchgeführten Rechnungen bestätigen, daß die Näherungsformeln der Theorie zum Folgetestverfahren nach WALD recht ungenau sind und vor allem die ASN-Funktion eines (nicht angepaßten) Folgetests stark unterschätzen. Diese Tatsache ist in der Literatur schon seit längerem bekannt.² Im Gegensatz dazu ist der Verlauf der Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichpro-

1 Vgl. AROIAN, L.A., Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 127 ff. und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. z. B. BAKER, A.G., a.a.O., S. 334 ff.; KEMP, K.W., a.a.O., S. 379 ff.; PAGE, E.S., a.a.O., S. 136 ff.; ROBINSON, J., a.a.O., S. 243 ff.; COLTON, McPHERSON, a.a.O., S. 83 ff.; CORNELIUSSEN, LADD, a.a.O., S. 639 ff.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 21 f.

benumfangs in der Literatur bisher kaum untersucht worden. Vor allem der für kleine Fehleranteile treppenförmige Verlauf der Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs, der die Vorschläge zur Approximation dieser Funktion z. B. durch eine Exponentialverteilung ad absurdum führt, hat bislang meines Wissens noch keine Beachtung gefunden. Einen ebenfalls treppenförmigen Verlauf weisen auch die Vertrauensgrenzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs für kleine Fehleranteile θ auf.

Wenn Abbruchregeln fehlen oder zu großzügig bemessen sind, liegen die Vertrauensgrenzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs (Werte der VES-Funktion) vor allem für mittlere Fehleranteilswerte sehr hoch. In den hier gewählten Beispielen betragen die 95 %-Vertrauensgrenzen bei einem Fehleranteil von $\theta \approx 0,025$ etwa das Doppelte der Stichprobenumfänge entsprechender Einfachtests. Ein ähnliches Verhältnis ist zu einem andersartigen Beispiel auch von CORNELIUSSEN und LADD gefunden worden, die als Ergebnis feststellen, daß das Folgetestverfahren gegenüber dem Einfachtestverfahren nicht vorzuziehen ist, wenn nicht eine geeignete Abbruchregel eingeführt wird.¹

Von den in der Literatur genannten Empfehlungen zur Vorgabe einer Abbruchregel² kann für die hier dargestellten Beispiele keine als geeignet angesehen werden. Das Dreifache der näherungsweise berechneten ASN-Funktion an der Stelle $\theta = \theta_0$ zu verwenden, wie es von WALD und von der Statistical Research Group (SRG) vorgeschlagen wird,³ führt in beiden Beispielen zu höheren Werten für n_0 als erforderlich wären. Dagegen sind die von SCHULTE bzw. von LEFFSON, LIPPMANN und BAETGE vorgeschlagenen Abbruchgrenzen⁴ in beiden Beispielen

1 Vgl. CORNELIUSSEN, LADD, a.a.O., S. 639 f.

2 Vgl. zu den folgenden Ausführungen S. 142 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

3 Vgl. WALD, A., a.a.O., S. 104 f.; SRG, Sequential Analysis ..., a.a.O., S. 218 ff.

4 Vgl. SCHULTE, E., a.a.O., S. 144; LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 65.

zu klein, d. h. sie führen zu höheren als zulässigen Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster und/oder zweiter Art.

Auch die Beziehungen (3.97) und (3.98) zur Bestimmung eines Abbruchkriteriums $c^*(n_0)$ sind bei den hier vorgestellten Beispielen kaum brauchbar. Diese Beziehungen mögen dann anwendbar sein, wenn die Steigung der Bereichsgrenzen ungefähr den Wert 0,5 besitzt; bei kleinen Werten für θ_0 und θ_A und damit kleinen Werten für die Steigung s sollte, wie die Rechnungen ergeben haben, c^* am unteren Rande des Weiterprüfungsbereiches oder auf der Annahmegerade selbst gewählt werden.

Die Vorgabe einer optimal angepaßten Abbruchregel führt zu Folgetests, die einerseits durch einen für alle Fehleranteile θ relativ niedrigen durchschnittlichen Stichprobenumfang und andererseits durch eine vergleichsweise niedrige Vertrauensgrenze für den entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang gekennzeichnet sind. Damit ermöglichen solche Tests eine wirtschaftliche Stichprobenauswertung, ohne jedoch bei der Prüfungsplanung unlösbare Probleme zu verursachen. Solche angepaßten Folgetests stellen einen Kompromiß zwischen dem Doppeltestverfahren und dem (unmodifizierten) Folgetestverfahren nach WALD dar; sie sind für Anwendungen im Prüfungswesen aus den hier dargestellten Gründen dem unmodifizierten Folgetest in jedem Fall vorzuziehen.

Eine zuverlässige Bestimmung einer solchen optimalen Abbruchregel ist mit dem oben beschriebenen modifizierten Rekursionsverfahren sehr einfach möglich. Als Faustregel könnte man - von den Ergebnissen zu den beiden Beispielen ausgehend - eine Abbruchregel für kleine Werte von θ_0 und θ_A als $c^* \geq c+1$ und $n_0 = a(c^*)$ bestimmen. Ob bzw. unter welchen Voraussetzungen diese Beziehungen allgemeine Gültigkeit besitzen, ließe sich nur durch weitergehende Untersuchungen klären, die den Rahmen dieser Arbeit jedoch sprengen würden.

renden Zuständen erreicht, aber nicht mehr verlassen werden kann.¹ Wenn i ein absorbierender Zustand ist, muß

$$w_{ii} = 1 \quad (4.60)$$

gelten.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll der Begriff "Markov-Kette" nur im Sinne von "homogener absorbierender Markov-Kette" verwendet werden. Im folgenden Punkt 4.4.2 sind zunächst die Grundlagen einer Beschreibung eines Folgetests durch eine Markov-Kette darzustellen. Dabei soll, um die Verständlichkeit der Darstellung zu erhöhen, ein schrittweises Vorgehen gewählt werden: Zunächst wird als einfachster Fall ein Folgetest mit Entnahme und Auswertung in Gruppen ohne vorzeitigen Abbruch, anschließend ein Folgetest mit Gruppenentnahme mit vorzeitigem Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze (Prinzip des "semi curtailed sampling") und als letztes ein Folgetest mit Einzelentnahme unterstellt. Zur weiteren Vereinfachung dieser Herleitungen soll dabei angenommen werden, daß der Kehrwert der Steigung s mit dem Gruppenumfang n_d übereinstimmt, daß also die Bedingung

$$\frac{1}{s} = s_k = n_d \quad (4.61)$$

erfüllt ist. Als Kenngrößen sollen hier nur die Werte der OC- und der ASN-Funktion für einen vorgegebenen Fehleranteil θ berücksichtigt werden; auf die Herleitung der VSN-Funktion soll verzichtet werden, da der zur Herleitung erforderliche Aufwand relativ hoch und die praktische Bedeutung der VSN-Funktion nur gering ist.

¹ Vgl. KEMENY, SNELL, a.a.O., S. 35 f. und S. 43 ff.;
KEMENY, SNELL, KNAPP, a.a.O., S. 81 und S. 106 ff.;
KEMENY, SCHLEIFER, SNELL, THOMPSON, a.a.O., S. 286 ff.;
KOBELT, H., a.a.O., S. 144 ff.

In Punkt 4.4.3 sind die mit Hilfe von Markov-Ketten errechneten Ergebnisse zu ausgewählten Beispielen darzustellen. Hier sollen wieder die beiden auf Seite 40 dieser Arbeit eingeführten Beispiele verwendet werden, wobei allerdings aus rechentechnischen Gründen der exakte Wert von $s = 0,024985$ für die Steigung der Bereichsgrenzen durch den Wert $s = 0,025 = 1/40$ ersetzt werden muß. Die Abweichung zwischen diesen beiden Werten ist jedoch so gering, daß sie für praktische Erfordernisse vermutlich vernachlässigt werden kann. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick auf mögliche Weiterentwicklung gibt der diesen Abschnitt abschließende Punkt 4.4.4.

4.4.2 Darstellung eines Folgetests durch eine Markov-Kette

In den folgenden Herleitungen soll, wie bereits erwähnt wurde, unterstellt werden, daß der Kehrwert der Steigung s der Bereichsgrenzen ganzzahlig ist, daß also die Bedingung (4.61) erfüllt ist. In diesem Fall können die Entscheidungsbereiche des Folgetests in eine Folge identischer Segmente von der Breite n_d zerlegt werden.¹ Die Punkte $P(x;y)$ und $P(x+1;y+n_d)$ beliebiger aufeinanderfolgender Segmente t und $t+1$ ($t=1,2,\dots$) besitzen exakt die gleiche Lage zu den Bereichsgrenzen dieses Folgetests. Dies gilt insbesondere auch für die Punkte im Annahme- und im Rückweisebereich der Nullhypothese sowie für die Punkte im Weiterprüfungsbereich an den Stellen $y=n_d, 2 \cdot n_d, 3 \cdot n_d, \dots$. Eine solche Einteilung in Segmente ist in der Abbildung 4.20 grafisch dargestellt.

Jedes dieser Segmente kann als Periode einer Markov-Kette interpretiert werden. Entsprechende Punkte im Annahme- oder Rückweisebereich der Nullhypothese können als ein absorbierender, entsprechende Punkte im Weiterprüfungsbereich an

¹ Vgl. auch POLYA, G., a.a.O., S. 230 ff.

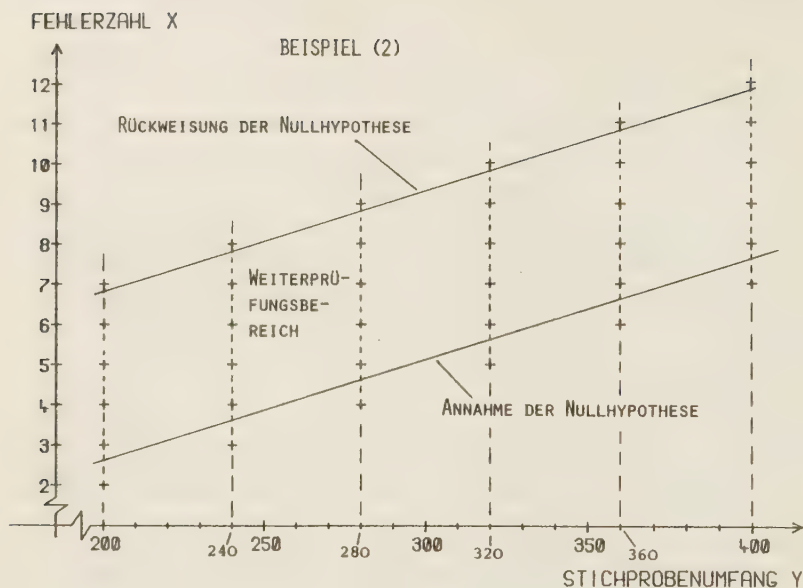


Abb. 4.20: Einteilung der Entscheidungsbereiche eines Folgetests in Segmente

den Stellen $y = t \cdot n_d$ mit $t = 0, 1, 2, \dots$ als ein nicht absorbierender Zustand dieser Markov-Kette interpretiert werden. Einige solcher Punkte sind in der Abbildung 4.20 besonders gekennzeichnet worden.

Diese Ausführungen sollen, wie bereits angekündigt, zunächst durch ein möglichst einfaches Beispiel konkretisiert werden. Wenn in Schritt 1 ein Folgetest mit Gruppenentnahme ohne vorzeitigen Abbruch unterstellt wird, ist eine Differenzierung danach, bei welchem Element innerhalb eines Segmentes der Annahme- oder der Rückweisebereich der Nullhypothese erreicht wird, nicht erforderlich; der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang kann in diesem Fall nur die Werte $y = n_d, 2 \cdot n_d, 3 \cdot n_d, \dots$ annehmen.

Zur Darstellung eines solchen Folgetests und zur Berechnung seiner Kenngrößen genügt eine Markov-Kette mit zwei absorbierenden Zuständen, die hier mit $AN(t)$ (Annahme der Nullhypothese in der Periode t) und $RN(t)$ (Rückweisung der Nullhypothese in der Periode t) bezeichnet werden sollen. Die Zahl der nicht absorbierenden Zustände entspricht der Zahl der Punkte im Weiterprüfungsbereich an den Stellen $y = t \cdot n_d$ ($t=1,2,\dots$). Diese Anzahl soll im folgenden mit r bezeichnet werden; die nicht absorbierenden Zustände werden - von unten nach oben - $W_1(t); W_2(t), \dots, W_r(t)$ genannt.

Die entsprechenden Zustände für aufeinanderfolgende Perioden sind in der Abbildung 4.21 grafisch dargestellt. Die Zustände $W_1(t), W_2(t), \dots, W_r(t)$ umfassen jeweils einen Punkt im Weiterprüfungsbereich des Folgetests. Der Zustand $AN(t)$

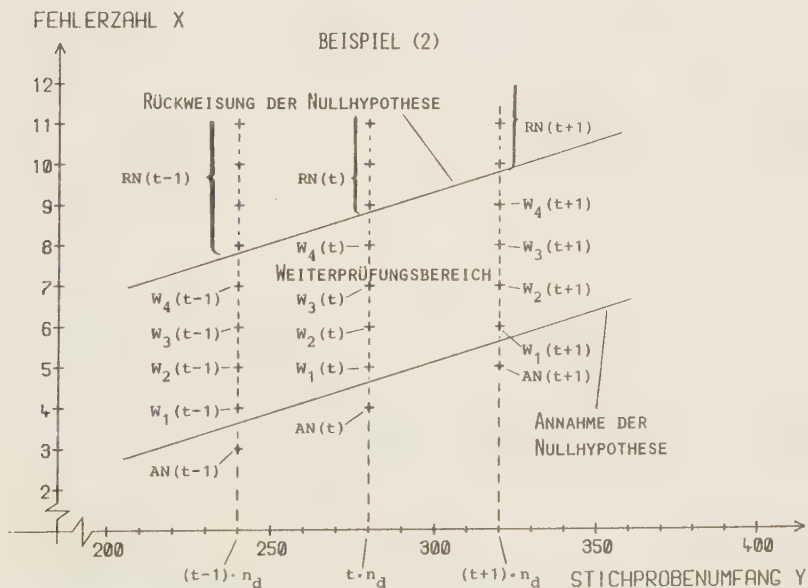


Abb. 4.21: Zustände einer Markov-Kette bei einem Folgetest mit Auswertung in Gruppen (ohne Abbruch)

umfaßt unter den oben angegebenen Voraussetzungen jeweils genau einen Punkt im Annahmehereich

$$AN(t) = \{ P(c(y); y) \} \quad (y=t \cdot n_d; t=1,2,\dots); \quad (4.62)$$

dabei ist $c(y)$ die durch (3.29 ff.) bestimmte Annahmehzahl des Folgetests. Der Zustand $RN(t)$ umfaßt dagegen die Punkte

$$RN(t) = \{ P(d(y); y), P(d(y)+1; y), P(d(y)+2; y), \dots \} \\ (y=t \cdot n_d; t=1,2,\dots) \quad (4.63)$$

wobei $d(y)$ die Rückweizezahl des Folgetests ist.

Die Wahrscheinlichkeiten dafür, am Ende der Periode t , d. h. bei einem Stichprobenumfang von $y=t \cdot n_d$, einen der Zustände $AN(t)$, $RN(t)$, $W_1(t)$, $W_2(t)$, ..., $W_r(t)$ zu erreichen, können als Elemente des Zeilenvektors $\mathbf{w}(t)$ dargestellt werden.¹ Die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem der Zustände $AN(t-1)$, $RN(t-1)$, $W_1(t-1)$, $W_w(t-1)$, ..., $W_r(t-1)$ zu einem der oben genannten Zustände werden in Form einer Übergangsmatrix $\mathbf{W}(t)$ zusammengefaßt. Der Vektor $\mathbf{w}(t)$ ist damit durch

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t-1) \cdot \mathbf{W}(t) \quad (t=1,2,\dots) \quad (4.64)$$

bestimmt.² Da unter den hier gemachten Voraussetzungen sämtliche Segmente dieses Folgetests identisch sind, sind auch die Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Perioden t ($t=1,2,\dots$) identisch. Damit ist also

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W} \quad (t=1,2,\dots), \quad (4.65)$$

die betrachtete Markov-Kette homogen.

¹ Entsprechend dem in der Literatur vorgeschlagenen Aufbau werden zuerst die absorbierenden, dann die nicht absorbierenden Zustände berücksichtigt; vgl. z. B. KEMENY, SNELL, a.a.O., S. 44 ff.; KEMENY, SNELL, KNAPP, a.a.O., S. 106 ff.; KEMENY, SCHLEIFER, SNELL, THOMPSON, a.a.O., S. 288 ff.

² Vgl. KEMENY, SNELL, a.a.O., S. 33.

Unter diesen Voraussetzungen kann man den Zeilenvektor $\mathbf{w}(t)$ als

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(t) &= \mathbf{w}(t-1) \cdot \mathbf{W} & (t=1,2,\dots) \\ &= \mathbf{w}(0) \cdot \mathbf{W}^t & (t=1,2,\dots),\end{aligned}\quad (4.66)$$

also als Produkt aus dem Ausgangsvektor $\mathbf{w}(0)$ und der t -ten Potenz der Übergangsmatrix $\mathbf{W}$ berechnen.¹ Der Ausgangsvektor $\mathbf{w}(0)$ gibt die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen der Prozeß in einem der möglichen Zustände dieser Markov-Kette beginnt.

Bevor gezeigt werden soll, wie im konkreten Fall die Elemente des Ausgangsvektors $\mathbf{w}(0)$ und der Übergangsmatrix $\mathbf{W}$ bestimmt werden, sollen zunächst einige allgemeine Eigenschaften absorbierender Markov-Ketten aufgezeigt werden, die eine vereinfachte Berechnung der Elemente des Wahrscheinlichkeitsvektors $\mathbf{w}(t)$ gestatten. Hierauf aufbauend können, wie im Anschluß daran gezeigt werden soll, die Werte der OC- und ASN-Funktion eines Folgetests mit Gruppenauswertung ohne vorzeitigen Abbruch relativ leicht mit Hilfe von standardisierten Matrizenoperationen bestimmt werden.

Grundlage der folgenden Herleitungen ist die Zerlegung der Übergangsmatrix $\mathbf{W}$, die die Dimension $((r+2) \times (r+2))$ besitzt, in vier Teilmatrizen²

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

¹ Vgl. KEMENY, SNELL, a.a.O., S. 33 f.; KEMENY, SCHLEIFER, SNELL, THOMPSON, a.a.O., S. 277 ff.; CHUNG, K.L., a.a.O., S. 271 ff.; FERSCHL, F., a.a.O., S. 19 f.; KOBELT, H., a.a.O., S. 124 ff.

² Vgl. zu den folgenden Ausführungen vor allem KEMENY, SNELL, a.a.O., S. 44 ff.; KEMENY, SNELL, KNAPP, a.a.O., S. 106 ff.; KEMENY, SCHLEIFER, SNELL, THOMPSON, a.a.O., S. 288 ff.

Dabei bedeuten:

- E** : Einheitsmatrix der Dimension (2 x 2);
O : Nullmatrix der Dimension (2 x r);
R : Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten von einem nicht absorbierenden zu einem absorbierenden Zustand der Dimension (r x 2);
Q : Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten von einem nicht absorbierenden zu einem nicht absorbierenden Zustand der Dimension (r x r).

Analog kann auch die Übergangsmatrix für t Perioden, das ist die Matrix $\mathbf{W}^t$, in vier Teilmatrizen

$$\mathbf{W}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R}(t) & \mathbf{Q}^t \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

zerlegt werden.¹ Dabei besitzen **E** und **O** die gleiche Bedeutung wie oben, $\mathbf{Q}^t$ ist die t-te Potenz der Teilmatrix **Q**, und $\mathbf{R}(t)$ ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= (\mathbf{Q}^0 + \mathbf{Q}^1 + \mathbf{Q}^2 + \dots + \mathbf{Q}^{t-1}) \cdot \mathbf{R} \quad (t=1, 2, \dots) \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{Q}^k \cdot \mathbf{R} \quad (t=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.69)$$

bestimmt, wobei hier $\mathbf{Q}^0$ als Einheitsmatrix der Dimension (r x r) definiert ist.

In gleicher Weise kann auch der Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{w}(t)$ in zwei Teilvektoren

$$\mathbf{w}(t) = (\mathbf{u}(t); \mathbf{v}(t)) \quad (t=0, 1, \dots) \quad (4.70)$$

aufgeteilt werden. Es bedeuten:

¹ Vgl. KEMENY, SNELL, KNAPP, a.a.O., S. 107 f.

- $\mathbf{u}(t)$: Vektor der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß sich der Prozeß am Ende der Periode t in einem absorbierenden Zustand befindet, Dimension (1×2) ;
- $\mathbf{v}(t)$: Vektor der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß sich der Prozeß am Ende der Periode t in einem nicht absorbierenden Zustand befindet, Dimension $(1 \times r)$.

Die Gleichung (4.66) kann nun in der Form

$$(\mathbf{u}(t); \mathbf{v}(t)) = (\mathbf{u}(0); \mathbf{v}(0)) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R}(t) & \mathbf{Q}^t \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

geschrieben werden, wobei $\mathbf{u}(0)$ und $\mathbf{v}(0)$ die Ausgangswahrscheinlichkeiten dieser Markov-Kette enthalten.

Da der Zufallsweg eines Folgetests im Koordinatenursprung und damit in einem Punkt des Weiterprüfungsbereiches beginnt, müssen die Elemente des Vektors $\mathbf{u}(0)$, der die Wahrscheinlichkeit für einen Beginn in einem absorbierenden Zustand angibt, alle Null sein. Die Elemente des Vektors $\mathbf{v}(0)$ geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der Prozeß in einem nicht absorbierenden Zustand $W_1(0)$, $W_2(0)$, ..., $W_r(0)$ beginnt. Das Element dieses Vektors, das dem Koordinatenursprung $P(0;0)$ entspricht, besitzt den Wert Eins; alle anderen besitzen den Wert Null.

Ausgehend von der Beziehung (4.71) können nun, da $\mathbf{u}(0)$ ein Nullvektor ist, der Teilvektor $\mathbf{u}(t)$ als

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{R}(t) \quad (t=1,2,\dots) \quad (4.72)$$

und der Teilvektor $\mathbf{v}(t)$ als

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{Q}^t \quad (t=1,2,\dots) \quad (4.73)$$

bestimmt werden. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß nach Abschluß von t Perioden, d. h. bei einem Stichprobenumfang

von $y=t \cdot n_d$ einer der absorbierenden Zustände $AN(t)$ bzw. $RN(t)$ erreicht worden ist, können als Elemente des Vektors $\mathbf{u}(t)$ mit Hilfe einfacher Matrizenoperationen berechnet werden. Ebenso können die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß nach t Perioden ein nicht absorbierender Zustand $W_1(t)$, $W_2(t), \dots, W_r(t)$, d. h. ein Punkt im Weiterprüfungsbereich des Folgetests erreicht worden ist, als Elemente des Vektors $\mathbf{v}(t)$ relativ einfach mit Hilfe von Matrizenoperationen berechnet werden.

Die Summe der Elemente des Vektors $\mathbf{v}(t)$ gibt die Weiterprüfungswahrscheinlichkeit dieses Folgetests nach Abschluß von t Perioden, d. h. nach der Auswertung von t Gruppen von jeweils n_d Stichprobenelementen an. Wenn $\mathbf{c}$ als Spaltenvektor der Länge r , dessen Elemente sämtlich den Wert Eins besitzen, definiert wird

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

ergibt sich die Weiterprüfungswahrscheinlichkeit bei einem Stichprobenumfang von $y=t \cdot n_d$ als

$$f_W(t \cdot n_d) = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{c} \quad (t=1,2,\dots) \quad (4.75)$$

Die kumulierte Annahmewahrscheinlichkeit bis zum Ende der Periode t , d. h. bis zu einem Stichprobenumfang von $t \cdot n_d$, kann unter der Voraussetzung, daß das erste Element des Vektors $\mathbf{u}(t)$ ($t=1,2,\dots$) die Wahrscheinlichkeit für Erreichen des Annahmebereiches angibt, als

$$F_A(t \cdot n_d) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{s} \quad (t=1,2,\dots) \quad (4.76)$$

bestimmt werden, wobei $\mathbf{s}$ als Spaltenvektor der Länge 2

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

definiert ist.

Den Wert der OC-Funktion eines Folgetests mit offenem Weiterprüfungsbereich für einen vorgegebenen Fehleranteils-
wert θ erhält man als Grenzwert

$$OC(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_A(t \cdot n_d) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{s}. \quad (4.78)$$

Unter Verwendung der Beziehungen (4.72) und (4.69) kann diese Formel zu

$$OC(\theta) = \mathbf{v}(0) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k \right) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{s} \quad (4.79)$$

umgeformt werden, wobei $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ die auf Seite 270 dieser Arbeit definierten Matrizen bezeichnen. Durch Einführung der Matrix

$$\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k \quad (4.80)$$

kann die Beziehung (4.79) weiter vereinfacht werden. Die Matrix $\mathbf{N}$ wird auch als "Ausgangsmatrix" ("fundamental matrix") einer absorbierenden Markov-Kette bezeichnet; diese Matrix, die sehr einfach als Inverse der Differenz $(\mathbf{E} - \mathbf{Q})$ bestimmt werden kann, existiert für jede absorbierende Markov-Kette.¹ Die Elemente n_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, r$) der Ausgangsmatrix geben an, wie oft im Durchschnitt der nicht absorbierende Zustand $W_j(t)$ ($t=0, 1, \dots$) durchlaufen wird, wenn der Prozeß im Zustand $W_i(0)$ beginnt.²

Der Wert der OC-Funktion des betrachteten Folgetests kann also als Produkt von Vektoren und Matrizen

$$OC(\theta) = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{s} \quad (4.81)$$

¹ Vgl. KEMENY, SNELL, a.a.O., S. 45 f.; KEMENY, SCHLEIFER, SNELL, THOMPSON, a.a.O., S. 288 f.

² Vgl. KEMENY, SCHLEIFER, SNELL, THOMPSON, a.a.O., S. 289.

bestimmt werden. Zur weiteren Vereinfachung sollen die Vektoren

$$\mathbf{m} = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{N} \quad (4.82)$$

und

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s} \quad (4.83)$$

eingeführt werden. Der Vektor $\mathbf{m}$ ist ein Zeilenvektor mit r Elementen, der die durchschnittliche Zahl der Durchläufe durch die nicht absorbierenden Zustände, d. h. durch entsprechende Punkte im Weiterprüfungsbereich eines Folgetests angibt. Die Zufallswege dieses Folgetests beginnen mit einer Wahrscheinlichkeit von Eins im Koordinatenursprung. Der Vektor $\mathbf{p}$ ist dagegen ein Spaltenvektor der Länge r , dessen Elemente die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, daß ausgehend von einem der nicht absorbierenden Zustände $W_1(t), W_2(t), \dots, W_r(t)$ ($t=0,1,\dots$) in der folgenden Periode der Annahmebereich der Nullhypothese, also der Zustand $AN(t+1)$ erreicht wird. Der Wert der OC-Funktion dieses Folgetests für einen vorgegebenen Anteilswert θ ergibt sich also schließlich als Produkt dieser Vektoren

$$OC(\theta) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \quad (4.84)$$

Der Wert der ASN-Funktion dieses Folgetests kann, da bei Gruppenentnahme ohne vorzeitigen Abbruch zwischen dem entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfang Y und der Zahl der Entscheidungsperioden T die Beziehung $Y = n_d \cdot T$ besteht, sehr einfach als

$$ASN(\theta) = n_d \cdot E(T) \quad (4.85)$$

bestimmt werden. Hierbei bezeichnet $E(T)$ die durchschnittliche Zahl von Entscheidungsperioden bis zum Erreichen eines absorbierenden Zustandes (durchschnittliche Absorptionszeit), die für einen vorgegebenen Ausgangsvektor $\mathbf{v}(0)$ durch

$$E(T) = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{c} \quad (4.86)$$

gegeben ist.¹ Die Matrix $\mathbf{N}$ ist die Ausgangsmatrix dieser absorbierenden Kette, $\mathbf{c}$ ist der durch (4.74) definierte Spaltenvektor.

Der Wert der ASN-Funktion eines Folgetests mit Gruppenentnahme für einen vorgegebenen Fehleranteil θ ist also durch

$$ASN(\theta) = n_d \cdot \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{c} \quad (4.87)$$

bestimmt. Unter Verwendung des durch die Gleichung (4.82) definierten Vektors $\mathbf{m}$ kann diese Formel weiter vereinfacht werden. Zusätzlich soll hier der Spaltenvektor

$$\mathbf{e} = n_d \cdot \mathbf{c} \quad (4.88)$$

eingeführt werden, dessen r Elemente alle den Wert n_d besitzen. Der Wert der ASN-Funktion eines Folgetests mit Gruppenauswertung ohne vorzeitigen Abbruch kann damit als Produkt zweier Vektoren

$$ASN(\theta) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} \quad (4.89)$$

berechnet werden.

¹ Vgl. z. B. KEMENY, SNELL, a.a.O., S. 50 f.; KEMENY, SCHLEIFER, SNELL, THOMPSON, a.a.O., S. 290 ff. Die gleiche Beziehung würde man auch ausgehend von der in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit angegebenen Formel (4.44) zur Berechnung der ASN-Funktion erhalten: Unter Verwendung von (4.75) und (4.73) findet man

$$E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} f_W(k \cdot n_d) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{Q}^k \cdot \mathbf{c}.$$

Diese Beziehung kann zu

$$E(T) = \mathbf{v}(0) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k \right) \cdot \mathbf{c}$$

und unter Berücksichtigung von (4.80) weiter zu der oben angegebenen Formel (4.86) umgeformt werden, q.e.d.

Als Ergebnis der vorangegangenen Herleitungen ist festzuhalten, daß die Werte der OC- und der ASN-Funktion eines Folgetests für einen vorgegebenen Fehleranteil θ im einfachsten Fall als Produkte eines Zeilenvektors und eines Spaltenvektors mit jeweils r Elementen berechnet werden können; hierbei ist r die Anzahl der nicht absorbierenden Zustände dieses Folgetests. Zur Berechnung des Vektors $\mathbf{m}$ wird die Kenntnis der Ausgangsmatrix $\mathbf{N}$ und damit der Matrix $\mathbf{Q}$ und zur Berechnung des Vektors $\mathbf{p}$ die Kenntnis der Matrix $\mathbf{R}$ vorausgesetzt.

Die Matrizen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Q}$ sind als Bestandteile der Übergangsmatrix $\mathbf{W}$ bereits auf den Seiten 273 ff. dieser Arbeit definiert worden. Bisher wurde jedoch noch nicht angegeben, wie die Elemente dieser beiden Matrizen konkret bestimmt werden können. Dies soll nun nachgeholt werden.

Die Wahrscheinlichkeiten dafür, ausgehend von einem nicht absorbierenden Zustand $W_1(t-1)$, $W_2(t-1)$, ..., $W_r(t-1)$ einen der beiden absorbierenden Zustände $AN(t)$ oder $RN(t)$ zu erreichen, das sind die Elemente der Matrix $\mathbf{R}$, können anhand der Abbildung 4.21 gefunden werden. Der Zustand $AN(t)$ kann, da negative Fehlerzahlen nicht auftreten, nur ausgehend vom Zustand $W_1(t-1)$ erreicht werden, und zwar dann, wenn innerhalb einer Periode (einer Gruppe von n_d Stichprobenelementen) keine fehlerhaften Elemente auftreten. Der Zustand $RN(t)$ tritt zum Beispiel dann ein, wenn ausgehend von $W_1(t-1)$ mehr als r oder ausgehend von $W_2(t-1)$ mehr als $(r-1)$ fehlerhafte Elemente bzw. ausgehend von $W_r(t)$ mehr als 1 fehlerhaftes Element innerhalb einer Gruppe von n_d Elementen gefunden werden.

Die Elemente der Matrix $\mathbf{R}$ können damit, da hier die Gültigkeit des Binomialmodells unterstellt wird, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeits- bzw. der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung als

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} & \text{AN} & \text{RN} \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{matrix} & \begin{pmatrix} f_B(0/n_d; \theta) & 1 - F_B(r/n_d; \theta) \\ 0 & 1 - F_B(r-1/n_d; \theta) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 - F_B(1/n_d; \theta) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.90)$$

bestimmt werden. Eine vollständige Berechnung dieser Matrix ist jedoch nicht erforderlich, denn wie die oben dargestellten Herleitungen gezeigt haben, wird zur Ermittlung eines Wertes der OC-Funktion nur das Produkt $\mathbf{p} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}$ benötigt, wobei $\mathbf{s}$ durch die Gleichung (4.77) bestimmt ist. Damit entspricht der Spaltenvektor $\mathbf{p}$ genau der ersten Spalte der Matrix $\mathbf{R}$; dieser Vektor $\mathbf{p}$ kann ohne Umweg über die Matrix $\mathbf{R}$ direkt als

$$\mathbf{p} = \begin{matrix} & \text{AN} \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{matrix} & \begin{pmatrix} f_B(0/n_d; \theta) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.91)$$

berechnet werden.

Die Elemente q_{ij} der Matrix $\mathbf{Q}$, die die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang zwischen nicht absorbierenden Zuständen angeben, können ebenfalls anhand der Abbildung 4.21 bestimmt werden. Von einem Zustand $w_i(t-1)$ ($t=1,2,\dots$) ausgehend wird der gleiche Zustand $w_i(t)$ auch in der Folgeperiode erreicht, wenn innerhalb einer Gruppe von n_d Elementen genau ein fehlerhaftes Element auftritt. Bei keinem oder bei mehr als einem fehlerhaften Element in einer Periode wird jeweils ein anderer als der Ausgangszustand realisiert.

Die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten können unter den oben angegebenen Voraussetzungen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung berechnet werden. Man findet

$$q_{ij} = \begin{cases} f_B(j-i+1/n_d; \theta) & \text{für } i, j=1, 2, \dots, r; j \geq i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.92)$$

In Matrixschreibweise ergibt sich für den Fall $r > 3$

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_1 & w_2 & \dots & w_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{matrix} & \begin{pmatrix} f_B(1/n_d; \theta) & f_B(2/n_d; \theta) & \dots & f_B(r/n_d; \theta) \\ f_B(0/n_d; \theta) & f_B(1/n_d; \theta) & \dots & f_B(r-1/n_d; \theta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_B(1/n_d; \theta) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.93)$$

Die Zeilensummen der Matrizen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Q}$ müssen sich, da beide Teile der Übergangsmatrix $\mathbf{W}$ sind, definitionsgemäß zu Eins ergänzen.¹ Diese Bedingung ist, wie man durch Vergleich der Bestimmungsgleichungen (4.90) und (4.92) bzw. (4.93) feststellen kann, in diesem Modell erfüllt. Falls die Matrix $\mathbf{R}$ vollständig berechnet worden ist, ist anhand dieser Bedingung eine Probe möglich, durch die eventuelle Rechenfehler bei der Berechnung der Elemente der beiden Matrizen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Q}$ aufgedeckt werden können.

Auch wenn auf eine Probe verzichtet werden soll, müssen die Elemente der Matrix $\mathbf{Q}$ vollständig berechnet werden, da andernfalls die sogenannte Ausgangsmatrix $\mathbf{N}$, die die Inverse der Differenz $(\mathbf{E} - \mathbf{Q})$ ist, nicht bestimmt werden kann. Jedoch braucht hier für die weiteren Berechnungen nicht die vollständige Matrix $\mathbf{N}$, sondern nur der Vektor $\mathbf{m} = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{N}$ gespeichert zu werden. Wenn $w_i(0)$ derjenige nicht absorbierende Zustand ist, der den Koordinatenursprung umfaßt, besitzt nur das Element $v_i(0)$ des Vektors $\mathbf{v}(0)$ den Wert Eins; die Elemente $v_j(0)$ ($j=1, \dots, r; i \neq j$) besitzen den Wert Null:

¹ Vgl. z. B. FERSCHL, F., a.a.O., S. 17 ff.

$$v_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (j=1, \dots, r) . \quad (4.94)$$

Der Vektor **m** entspricht damit genau der i-ten Zeile der Ausgangsmatrix **N**.

Diese Ausführungen seien anhand der hier vorgegebenen Beispiele (1) und (2) verdeutlicht: Zu Beispiel (1) sind die Ordinatenabschnitte der Bereichsgrenzen (bei konservativer Lösung) als $h_1 = h_2 \approx 1,8148$ berechnet worden. Dieser Folgetest besitzt demnach $r=3$ nicht absorbierende Zustände, z. B. an der Stelle $t=0$ die Zustände $W_1(0) = \{P(-1;0)\}$, $W_2(0) = \{P(0;0)\}$ und $W_3(0) = \{P(+1;0)\}$. Der Ausgangsvektor **v** (0) ist also in Beispiel (1)

$$\mathbf{v}(0) = (0 \quad 1 \quad 0) , \quad (4.95)$$

und der Vektor **m** entspricht damit der zweiten Zeile der Ausgangsmatrix **N**, die hier die Dimension (3 x 3) besitzt.

In Beispiel (2) dagegen lauten die Ordinatenabschnitte der Bereichsgrenzen $h_1 \approx 2,3699$ und $h_2 \approx 1,8148$. Dieser Folgetest besitzt damit $r=4$ nicht absorbierende Zustände, nämlich $W_1(0) = \{P(-2;0)\}$, $W_2(0) = \{P(-1;0)\}$, $W_3(0) = \{P(0;0)\}$ und $W_4(0) = \{P(+1;0)\}$. Der Zustand $W_3(t)$ umfaßt den Koordinatenursprung, und damit lautet der Ausgangsvektor in Beispiel (2)

$$\mathbf{v}(0) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) ; \quad (4.96)$$

der Vektor **m** entspricht in diesem Beispiel der dritten Zeile der Ausgangsmatrix **N**, deren Dimension (4 x 4) ist.

Die mit dem oben beschriebenen Ansatz berechneten Ergebnisse, d. h. die Werte der OC- und ASN-Funktionen zu den Beispielen (1) und (2) für den Fall, daß Gruppenentnahme ohne vorzeitigen Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze unterstellt wird, sind erst im folgenden Punkt 4.4.3

dieser Arbeit darzustellen. Zunächst ist zu zeigen, wie dieser Ansatz auf Folgetests mit Gruppenauswertung und vorzeitigem Abbruch bzw. auf Folgetests mit Einzelauswertung ausgedehnt werden kann.

Wenn ein Folgetest mit Auswertung in Gruppen und der Möglichkeit eines vorzeitigen Abbruchs bei Erreichen der Rückweisegrenze unterstellt wird, ist gegenüber dem bisher entwickelten Ansatz eine Differenzierung danach erforderlich, bei welchem Element innerhalb einer Gruppe von n_d Elementen die Rückweisegrenze dieses Folgetests erreicht wird. Diese Differenzierung ist dadurch möglich, daß nicht ein einzelner absorbierender Zustand im Rückweisebereich, sondern eine Reihe von Zuständen $RN_j(t)$ ($t=1,2,\dots$) berücksichtigt wird, wobei $j=1,2,\dots,n_d$ die Nummer des Elementes innerhalb einer Gruppe bezeichnet, bei der die Rückweisung der Nullhypothese erfolgt. Zusammen mit dem ebenfalls absorbierenden Zustand $AN(t)$ besitzt eine solche Markov-Kette also n_d+1 absorbierende Zustände; dazu kommen r nicht absorbierende Zustände $W_1(t), W_2(t), \dots, W_r(t)$. Diese Zustände sind in der Abbildung 4.22 grafisch dargestellt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, nach t Perioden einen der Zustände $AN(t), RN_1(t), RN_2(t), \dots, RN_{n_d}(t), W_1(t), W_2(t), \dots, W_r(t)$ zu erreichen, können als Elemente des Wahrscheinlichkeitsvektors $\mathbf{w}'(t)$ mit der Dimension $(1 \times (r+n_d+1))$ angegeben werden. Die Wahrscheinlichkeiten für Übergänge zwischen diesen Zuständen von einer zur nächsten Periode werden in Form der Übergangsmatrix $\mathbf{W}'$ dargestellt, die die Dimension $((r+n_d+1) \times (r+n_d+1))$ besitzt. Zur Vereinfachung der folgenden Herleitungen soll auch hier der Vektor $\mathbf{w}'(t)$ in zwei Teilvektoren

$$\mathbf{w}'(t) = (\mathbf{u}'(t); \mathbf{v}'(t)) \quad (4.97)$$

und die Matrix $\mathbf{W}'$ in vier Teilmatrizen

$$\mathbf{W}' = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R}' & \mathbf{Q}' \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

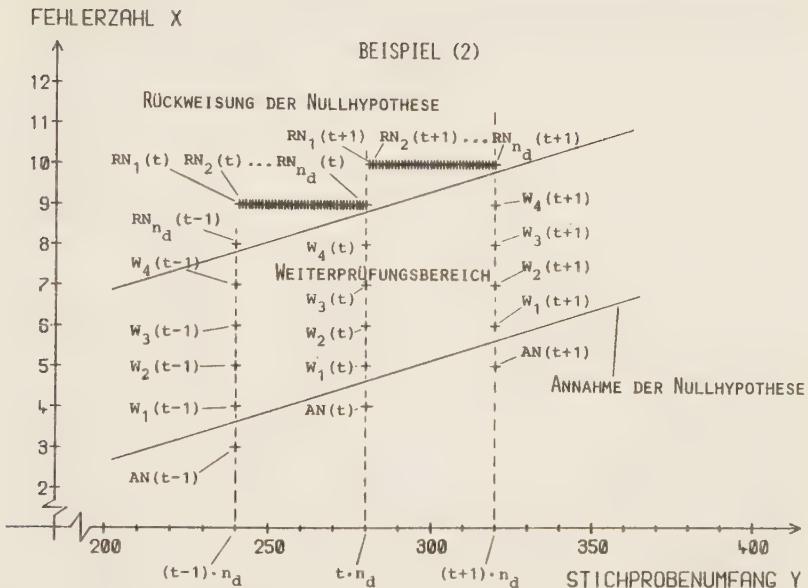


Abb. 4.22: Zustände einer Markov-Kette bei einem Folgetest mit Auswertung in Gruppen (mit vorzeitigem Abbruch)

zerlegt werden. Diese Teilvektoren und -matrizen besitzen die gleiche Bedeutung wie die auf Seite 274 dieser Arbeit eingeführten entsprechenden Vektoren und Matrizen, weisen aber, bedingt durch die größere Zahl absorbierender Zustände, teilweise eine größere Anzahl von Elementen, d. h. eine höhere Dimension auf. Hier gilt

$\mathbf{u}'(t)$: Vektor der Dimension $(1 \times (n_d+1))$;

$\mathbf{v}'(t)$: Vektor der Dimension $(1 \times r)$;

$\mathbf{E}$: Einheitsmatrix der Dimension $((n_d+1) \times (n_d+1))$;

$\mathbf{O}$: Nullmatrix der Dimension $((n_d+1) \times r)$;

$\mathbf{R}'$: Matrix der Dimension $(r \times (n_d+1))$;

$\mathbf{Q}'$: Matrix der Dimension $(r \times r)$.

Die sogenannte Ausgangsmatrix dieser Markov-Kette¹ soll mit N' bezeichnet werden. Zusätzlich werden die Vektoren

$$m' = v(0) \cdot N' \quad \text{Dimension } (1 \times r) \quad (4.99)$$

$$p' = R' \cdot s' \quad \text{Dimension } (r \times 1) \quad (4.100)$$

mit

$$s' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Dimension } ((n_d+1) \times 1) \quad (4.101)$$

eingeführt, die die gleiche Bedeutung wie die Vektoren und m bzw. p des oben dargestellten einfachen Beispiels besitzen. Nach einer ähnlichen Herleitung, wie sie für das einfache Beispiel gegeben worden ist, kann der Wert der OC-Funktion eines Folgetests mit Gruppenauswertung und mit vorzeitigem Abbruch bei Erreichen der Rückweisgrenze für einen vorgegebenen Fehleranteil θ als

$$OC'(\theta) = m' \cdot p' \quad (4.102)$$

berechnet werden; auf die Wiedergabe dieser Herleitung sei hier verzichtet.

Der Wert der ASN-Funktion für einen vorgegebenen Fehleranteil θ kann hier nicht so einfach bestimmt werden wie in der oben angegebenen Herleitung, da wegen der Möglichkeit eines vorzeitigen Abbruchs der Wert der ASN-Funktion kleiner oder gleich dem n_d -fachen der durchschnittlichen Zahl $E(T)$ von Entscheidungsperioden sein wird. Wenn im konkreten Fall in der Periode t ein absorbierender Zustand erreicht wird, setzt sich der entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang y aus den Umfängen der $(t-1)$ vorangegangenen Perioden $n_d \cdot (t-1)$ und aus der Anzahl y^* von Elementen, die

¹ Vgl. S. 277 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

innerhalb der Periode t bis zum Erreichen eines absorbierenden Zustandes geprüft werden müssen, zusammen. Dabei gilt

$$1 \leq y^* \leq n_d. \quad (4.103)$$

Die Zufallsvariable Y ist somit als

$$Y = n_d \cdot (T-1) + Y^* \quad (4.104)$$

definiert; und der Erwartungswert dieser Zufallsvariablen, d. h. der Wert der ASN-Funktion für einen vorgegebenen Fehleranteil θ , wird durch

$$\begin{aligned} \text{ASN}'(\theta) &= n_d \cdot E(T-1) + E(Y^*) \\ &= n_d \cdot E(T) + E(Y^*) - n_d \end{aligned} \quad (4.105)$$

bestimmt.¹ Dabei bezeichnet $E(T)$ die durchschnittliche Anzahl der Perioden, d. h. der Gruppen von jeweils (höchstens) n_d Elementen bis zu einer Entscheidung, und $E(Y^*)$ ist die durchschnittlich innerhalb einer Gruppe zum Erreichen eines der absorbierenden Zustände $AN(t), RN_1(t), \dots, RN_{n_d}(t)$ erforderliche Anzahl von Elementen. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, einen dieser absorbierenden Zustände zu erreichen, können als Produkt $\mathbf{m}' \cdot \mathbf{r}'$ berechnet werden. Dabei gibt der Vektor $\mathbf{m}'$ die durchschnittliche Anzahl der Durchläufe durch die nicht absorbierenden Zustände $W_1(t), \dots, W_r(t)$ an, und die Matrix $\mathbf{R}'$ enthält die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen nicht absorbierenden und absorbierenden Zuständen. Wenn nun die den absorbierenden Zuständen entsprechenden Erhebungsumfänge in Form eines Spaltenvektors $\mathbf{h}'$ mit n_d+1 Elementen zusammengefaßt werden, ergibt sich der Erwartungswert $E(Y^*)$ als Produkt

$$E(Y^*) = \mathbf{m}' \cdot \mathbf{R}' \cdot \mathbf{h}' \quad (4.106)$$

¹ Zum Rechnen mit Erwartungswerten vgl. z. B. BLEYMÜLLER, GEHLERT, GÜLICHER, a.a.O., S. 43 und S. 49 f.; KREYSZIG, E., a.a.O., S. 90 ff. und S. 152 ff.

Bei einem Folgetest mit Gruppenauswertung ist eine Annahme der Nullhypothese nur beim letzten Element einer Gruppe, also beim Element mit der Nummer n_d , möglich. Der Vektor $\mathbf{h}'$ ist in diesem Fall durch

$$\mathbf{h}'_i = \begin{cases} n_d & \text{für } i=1 \\ i-1 & \text{für } i=2, \dots, n_d+1 \end{cases} \quad (4.107)$$

oder in Matrixschreibweise durch

$$\mathbf{h}' = \begin{pmatrix} n_d \\ 1 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

bestimmt. Wenn zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise der $(r \times 1)$ -Vektor

$$\mathbf{d}' = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{h}' \quad (4.109)$$

eingeführt wird, ergibt sich $E(Y^*)$ als Produkt eines Zeilen- und eines Spaltenvektors mit jeweils r Elementen als

$$E(Y^*) = \mathbf{m}' \mathbf{d}' \quad (4.110)$$

Die durchschnittliche Zahl der Perioden bis zum Erreichen eines absorbierenden Zustandes kann ähnlich wie für das einfachere Beispiel angegeben¹ hergeleitet werden; eine Darstellung dieser Herleitung ist deshalb hier entbehrlich. Unter Verwendung des durch die Beziehung (4.88) definierten Vektors $\mathbf{e}$ erhält man schließlich

$$\text{ASN}'(\theta) = \mathbf{m}' \cdot \mathbf{e} + \mathbf{m}' \mathbf{d}' - n_d \quad (4.111)$$

für den Wert der ASN-Funktion eines Folgetests mit Gruppenauswertung und mit der Möglichkeit eines vorzeitigen Abbruchs.

¹ Vgl. S. 278 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

Die Werte der OC- und ASN-Funktion eines Folgetests mit Gruppenauswertung und vorzeitigem Abbruch, die die zu Beginn dieses Abschnittes angegebenen Voraussetzungen erfüllt, können also mit Hilfe grundlegender Matrizenoperationen berechnet werden. Nachzutragen bleibt, wie die Elemente der Matrizen $\mathbf{R}'$ und $\mathbf{Q}'$, die als Bestandteile der Übergangsmatrix $\mathbf{W}'$ auf den Seiten 284 f. dieser Arbeit definiert worden sind, und die daraus abgeleiteten Matrizen und Vektoren bestimmt werden können.

Die Elemente der ersten Spalte der Matrix $\mathbf{R}'$ geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, ausgehend von einem der nicht absorbierenden Zustände $W_1(t-1), W_2(t-1), \dots, W_r(t-1)$ den absorbierenden Zustand $AN(t)$ zu erreichen; diese Wahrscheinlichkeiten stimmen mit den Elementen der ersten Spalte der durch die Beziehung (4.90) bestimmten Matrix $\mathbf{R}$ exakt überein. Die Elemente der Spalte j ($j=2, \dots, n_d+1$) der Matrix $\mathbf{R}'$ enthalten die Wahrscheinlichkeiten dafür, von einem der nicht absorbierenden Zustände ausgehend in den Zustand $RN_{j-1}(t)$ zu gelangen. Diese Wahrscheinlichkeiten können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Negativen Binomialverteilung bestimmt werden:¹ Beispielsweise entspricht, wie man aus der Abbildung 4.22 ablesen kann, die Wahrscheinlichkeit für den Übergang vom Zustand $W_1(t-1)$ zum Zustand $RN_{j-1}(t)$ der Wahrscheinlichkeit dafür, das $(r+1)$ -ste fehlerhafte Element genau beim Element $j-1$ ($j=r+2, \dots, n_d+1$) einer Gruppe zu entdecken, also dem Wert $f_{NB}(j-1/r+1; \theta)$ der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Negativen Binomialverteilung. Allgemein findet man für ein Element r'_{ij} der Matrix $\mathbf{R}'$

$$r'_{ij} = \begin{cases} f_B(0/n_d; \theta) & \text{für } i=j=1, \\ f_{NB}(j-1/r+2-i; \theta) & \text{für } j=2, \dots, n_d+1; \\ & i=1, \dots, r; j \geq r-i+3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.112)$$

¹ Vgl. zu den folgenden Ausführungen S. 51 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

In Matrizenschreibweise lautet diese Matrix

$$\mathbf{R}' = \begin{matrix} & \text{AN} & \text{RN}_1 & \text{RN}_2 & \dots & \text{RN}_{n_d} \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{matrix} & \begin{pmatrix} f_B(0/n_d;\theta) & 0 & 0 & \dots & f_{NB}(n_d/r+1;\theta) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_{NB}(n_d/r;\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & f_{NB}(2/2;\theta) & \dots & f_{NB}(n_d/2;\theta) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.113)$$

Bemerkenswert ist, daß die zweite Spalte dieser Matrix nur Nullen enthält; eine Rückweisung gleich beim ersten Element einer Gruppe ist also nicht möglich.

Der Aufwand zur Berechnung der Werte der Matrix $\mathbf{R}'$ für einen vorgegebenen Fehleranteil θ ist relativ hoch. Dieser Aufwand kann jedoch durch die folgenden Überlegungen verringert werden: Zur Berechnung der OC-Funktion wird nicht die vollständige Matrix $\mathbf{R}'$ benötigt, sondern nur der Vektor $\mathbf{p}' = \mathbf{R}' \mathbf{s}'$. Dieser Vektor entspricht der ersten Spalte der Matrix $\mathbf{R}'$ und stimmt somit mit dem durch (4.91) gegebenen Vektor $\mathbf{p}$ exakt überein; eine erneute Berechnung ist also nicht erforderlich. Zum Zwecke der Berechnung der ASN-Funktion muß der Vektor $\mathbf{d}' = \mathbf{R}' \mathbf{h}'$ bestimmt werden. Unter Berücksichtigung von (4.108) und (4.112) bzw. (4.113) können die Elemente dieses Vektors auch unmittelbar als

$$d'_i = \begin{cases} n_d \cdot f_B(0/n_d;\theta) + \sum_{j=r+1}^{n_d} j \cdot f_{NB}(j/r+1;\theta) & \text{für } i=1 \\ \sum_{j=r+2-i}^{n_d} j \cdot f_{NB}(j/r+2-i;\theta) & \text{für } i=2, \dots, r \end{cases} \quad (4.114)$$

oder - wenn die auf der Seite 55 dieser Arbeit eingeführte Funktion $E_R(d;n;\theta)$ verwendet wird - als

$$d'_i = \begin{cases} n_d \cdot f_B(0/n_d; \theta) + E_R(r+1/n_d; \theta) & \text{für } i=1 \\ E_R(r+2-i/n_d; \theta) & \text{für } i=2, \dots, r \end{cases} \quad (4.115)$$

berechnet werden. Wenn die gesuchten Werte dieser Funktion direkt anhand einer der in dieser Arbeit angegebenen Formeln¹ errechnet oder aus einer geeigneten Tabelle entnommen werden - ein Beispiel einer solchen Tabelle ist im Anhang dieser Arbeit abgedruckt - ist eine vollständige Bestimmung der Matrix $\mathbf{R}'$ also zur Berechnung der OC- oder ASN-Funktion dieses Folgetests nicht erforderlich.

Eine Berechnung der Matrix $\mathbf{Q}'$, die die Wahrscheinlichkeiten für Übergänge zwischen den nicht absorbierenden Zuständen angibt, ist dann nicht erforderlich, wenn die Matrix $\mathbf{Q}$ bekannt ist. Wie bereits erwähnt wurde², wird durch einen vorzeitigen Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze der Verlauf der OC-Funktion eines beliebigen Tests nicht beeinflussen. Man kann nun zeigen, daß allgemein alle Elemente q'_{ij} der Matrix $\mathbf{Q}'$ mit den entsprechenden Elementen q_{ij} der Matrix $\mathbf{Q}$ identisch sind: Die Zahl möglicher Zufallswege von einem Zustand $W_i(t-1)$ zu einem Zustand $W_j(t)$ ($i, j=1, \dots, r$) ist unabhängig davon, ob ein vorzeitiger Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze zugelassen wird oder nicht; damit sind auch die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten gleich. Es gilt also

$$q'_{ij} = q_{ij} \quad (i, j=1, \dots, r) \quad (4.116)$$

und damit

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} \quad (4.117)$$

1 Die Beziehungen (2.34) bzw. (2.35) auf S. 55 dieser Arbeit ermöglichen eine vereinfachte Berechnung ausgehend von der Verteilungs- bzw. der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung.

2 Vgl. Abschnitt 2.5 und Punkt 4.2.4 dieser Arbeit.

sowie

$$m' = m = v(0) \cdot N \quad (4.118)$$

Daraus erhält man für die OC-Funktion von Folgetests mit Gruppenauswertung

$$OC(\theta) = OC'(\theta) = m \cdot p \quad (4.119)$$

Die durch vorzeitigen Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze möglichen Einsparungen können als

$$ASN(\theta) - ASN'(\theta) = n_d - m \cdot d' \quad (4.120)$$

berechnet werden.

Die zu den ausgewählten Beispielen berechneten Funktionswerte sind im folgenden Punkt 4.4.3 darzustellen. Zunächst jedoch soll kurz aufgezeigt werden, wie die Werte $OC''(\theta)$ und $ASN''(\theta)$ der OC- und ASN-Funktion eines Folgetests mit Einzelauswertung bestimmt werden können. Auch in diesem Fall ist wieder eine Differenzierung der absorbierenden Zustände nach dem damit verbundenen Erhebungsumfang innerhalb einer Gruppe erforderlich. Da unter der Voraussetzung $n_d=1/s$, die den bisherigen Herleitungen zugrunde liegt, jedoch die Annahmegrenze des Folgetests nur an einer einzigen Stelle innerhalb einer Gruppe von n_d Elementen erreicht bzw. überschritten werden kann, genügt die Vorgabe eines einzigen absorbierenden Zustandes $AN(t)$ im Annahmereich der Nullhypothese. Weitere absorbierende Zustände sind $RN_1(t), \dots, RN_{n_d}(t)$, nicht absorbierende Zustände sind $W_1(t), \dots, W_I(t)$. Diese Zustände sind zu einem Beispiel eines Folgetests mit Einzelauswertung in der Abbildung 4.23 dargestellt.

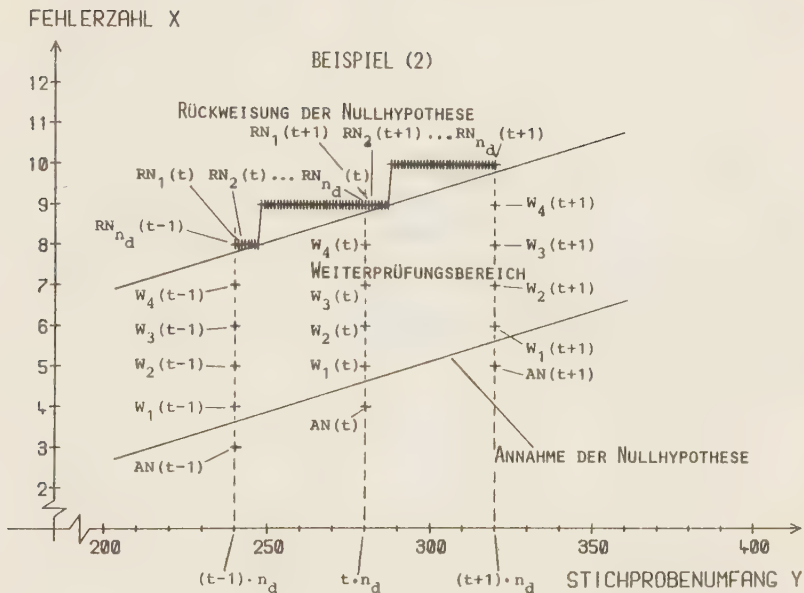


Abb. 4.23: Zustände einer Markov-Kette bei einem Folgetest mit Einzelauswertung

Die Anzahl der Zustände dieser Markov-Kette ist also mit der Zahl der Zustände beim Folgetest mit Gruppenauswertung und vorzeitigem Abbruch identisch. Auch die Herleitung der Werte der OC- und ASN-Funktion erfolgt in gleicher Weise wie dort angegeben, so daß auf eine Wiedergabe dieser Herleitung verzichtet werden kann. Man erhält

$$OC''(\theta) = m'' \cdot p'' \quad (4.121)$$

und

$$ASN''(\theta) = m'' \cdot e + m'' \cdot d'' - n_d, \quad (4.122)$$

wobei die Vektoren m'' , p'' und d'' die gleiche Bedeutung und die gleiche Dimension wie die entsprechenden

Vektoren $\mathbf{m}'$, $\mathbf{p}'$ und $\mathbf{d}'$ in der oben angegebenen Herleitung besitzen; diese Vektoren stimmen jedoch im allgemeinen nicht überein.

Die Abweichungen zwischen den Vektoren $\mathbf{d}'' = \mathbf{R}'' \mathbf{h}''$ und $\mathbf{d}'$ sind teilweise dadurch begründet, daß das erste Element des Vektors $\mathbf{h}''$, das die Nummer des Elementes innerhalb einer Gruppe angibt, bei dem eine Annahme der Nullhypothese möglich ist, im allgemeinen nicht den Wert n_d besitzt.¹ Dieses Element kann als ganzzahliger Rest bei der Division einer beliebigen Annahmezahl² $a(x)$ ($x=0,1,\dots$) durch den Gruppenumfang n_d bestimmt werden. In dem hier gewählten Beispiel (1) findet man

$$h_i'' = \begin{cases} 33 & \text{für } i=1 \\ i-1 & \text{für } i=2,\dots,n_d+1 \end{cases} \quad (4.123)$$

und im Beispiel (2) (bei Rechnung mit $s=0,025$)

$$h_i'' = \begin{cases} 15 & \text{für } i=1 \\ i-1 & \text{für } i=2,\dots,n_d+1 \end{cases} \quad (4.124)$$

Auch die Matrizen $\mathbf{R}'$ und $\mathbf{R}''$ bzw. die Matrizen $\mathbf{Q}'$ und $\mathbf{Q}''$ stimmen im allgemeinen nicht überein.³ Wenn innerhalb eines Intervalls von n_d Elementen Sprünge der Annahme- und/oder der Rückweisegrenze auftreten, ist eine Berechnung der Wahrscheinlichkeiten q_{ij}' mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung mit den Parametern n_d und θ nicht möglich, weil hierdurch auch diejenigen Zufallswege erfaßt würden, die zunächst

1 Eine Ausnahme besteht dann, wenn der Ordinatenabschnitt h_1 ganzzahlig oder um weniger als den Betrag s kleiner als eine ganze Zahl ist.

2 Vgl. S. 100 ff. dieser Arbeit.

3 Eine Ausnahme liegt dann vor, wenn die Ordinatenabschnitte h_1 und h_2 der Bereichsgrenzen ganzzahlig sind und/oder wenn die Annahme- und Rückweisekennzahlen $a(x)$ und $r(x)$ ($x = 0, 1, \dots$) ganzzahlige Vielfache von n_d sind.

den Weiterprüfungsbereich verlassen, dann aber in den Weiterprüfungsbereich zurückkehren. Aus dem gleichen Grunde können auch die Elemente r_{ij}'' ($j=2, \dots, n_d+1$) der Matrix $\mathbf{R}''$ nicht ohne weiteres mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Negativen Binomialverteilung berechnet werden.

Eine sehr bequeme Lösung zur Berechnung dieser Übergangswahrscheinlichkeiten für einen vorgegebenen Anteilwert θ bietet jedoch die in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit beschriebene Rekursionstechnik. Gegenüber dem dort beschriebenen Verfahren¹ sind nur geringfügige Modifikationen erforderlich. Ein wesentlicher Unterschied besteht darin, daß hier jeweils r Durchläufe durch den Rekursionsalgorithmus mit wechselnden Startwerten $W_1(0)$, $W_2(0)$, ..., $W_r(0)$ erforderlich sind: Bei jedem dieser r Durchläufe werden die Elemente einer Zeile der Matrix $\mathbf{R}''$ und einer Zeile der Matrix $\mathbf{Q}''$ berechnet.

Die vollständige Berechnung bzw. Speicherung der Matrix $\mathbf{R}''$ ist auch beim Folgetest mit Einzelauswertung, wie bereits bei den bisher dargestellten Varianten, nicht unbedingt erforderlich. Zur Berechnung des Wertes der OC-Funktion genügt die Kenntnis des Spaltenvektors $\mathbf{p}'' = \mathbf{R}'' \cdot \mathbf{s}'$, der der ersten Spalte der Matrix $\mathbf{R}''$ entspricht. Die Elemente des Vektors $\mathbf{d}'' = \mathbf{R}'' \cdot \mathbf{h}''$, der zur Berechnung des Wertes der ASN-Funktion benötigt wird, können mit dem Rekursionsalgorithmus fortlaufend direkt als

$$d_i'' = \sum_{j=1}^{n_d+1} h_i' \cdot r_{ij}'' \quad (4.124)$$

berechnet werden; die Elemente des Vektors $\mathbf{h}''$ sind dabei durch (4.123) gegeben. Eine ausführlichere Darstellung der rekursiven Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten würde hier zu weit führen; deshalb sei darauf verzichtet.

¹ Vgl. S. 232 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

4.4.3 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

Wegen des Umfanges der bei den oben angegebenen Herleitungen verwendeten Matrizen und Vektoren erscheint eine vollständige Darstellung des Rechenganges zu ausgewählten Beispielen als nicht angebracht. Hier sollen zur Veranschaulichungen lediglich die Elemente der Vektoren $\mathbf{m}$ bzw. $\mathbf{m}''$, $\mathbf{p}$ bzw. $\mathbf{p}''$ sowie $\mathbf{d}'$ bzw. $\mathbf{d}''$ und die errechneten Werte der OC- und ASN-Funktionen zu den beiden oben angegebenen Beispielen für einen Fehleranteil von $\theta = 0,025$ abgedruckt werden.

Zu Beispiel (1) findet man bei Gruppenauswertung¹

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' = \begin{pmatrix} 1.4786 & 2.5542 & 0.9008 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 0.3632 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d}' = \begin{pmatrix} 14.5867 \\ 2.2754 \\ 6.6084 \end{pmatrix}$$

bzw. bei Einzelauswertung

$$\mathbf{m}'' = \begin{pmatrix} 1.2461 & 2.3763 & 0.7299 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{p}'' = \begin{pmatrix} 0.4337 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d}'' = \begin{pmatrix} 14.6556 \\ 2.1938 \\ 5.3277 \end{pmatrix}$$

Bei Beispiel (2) besitzen die hier angegebenen Vektoren alle die Länge $r=4$; diese Vektoren lauten hier bei Gruppenauswertung

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' = \begin{pmatrix} 1.2005 & 2.0738 & 2.9666 & 1.1081 \end{pmatrix}$$

und

¹ Die hier abgedruckten Werte sind auf vier Nachkommastellen gerundet worden; bei der Berechnung der entsprechenden Werte der OC- und ASN-Funktion wurde jedoch eine größere Zahl von Nachkommastellen zugrunde gelegt.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 0.3632 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}' = \begin{pmatrix} 14.5425 \\ 0.5535 \\ 2.2754 \\ 6.6084 \end{pmatrix}$$

bzw. bei Einzelauswertung

$$\mathbf{m}'' = \begin{pmatrix} 0.6938 & 1.6433 & 2.6198 & 0.8410 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{p}'' = \begin{pmatrix} 0.6840 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}'' = \begin{pmatrix} 10.3550 \\ 0.5503 \\ 2.1938 \\ 5.3277 \end{pmatrix}.$$

Die errechneten Werte der OC- und ASN-Funktionen sind für Anteilwerte von $\theta = 0,010$; $0,025$ und $0,050$ in der Tabelle 4.8 abgedruckt. Zusätzlich sind die Verläufe der OC- und ASN-Funktionen zu den beiden Beispielen für die drei hier vorgestellten Auswertemethoden (Einzelauswertung, Gruppenauswertung mit vorzeitigem Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze bzw. Gruppenauswertung ohne vorzeitigen Abbruch) in den Abbildungen 4.24 und 4.25 grafisch dargestellt.

Bei- spiel	Einzelauswertung			Gruppenauswertung		
	θ	$OC''(\theta)$	$ASN''(\theta)$	$OC(\theta)$	$ASN'(\theta)$	$ASN(\theta)$
(1)	0.010	0.9723	114.43	0.9791	127.34	127.61
	0.025	0.5404	161.45	0.5370	190.67	197.34
	0.050	0.0479	79.49	0.0361	87.20	102.35
(2)	0.010	0.9715	149.85	0.9784	192.42	192.66
	0.025	0.4746	210.23	0.4360	286.63	293.96
	0.050	0.0193	84.12	0.0069	93.02	107.58

Tab. 4.8: Werte der OC- und ASN-Funktionen offener Folgetests zu ausgewählten Beispielen

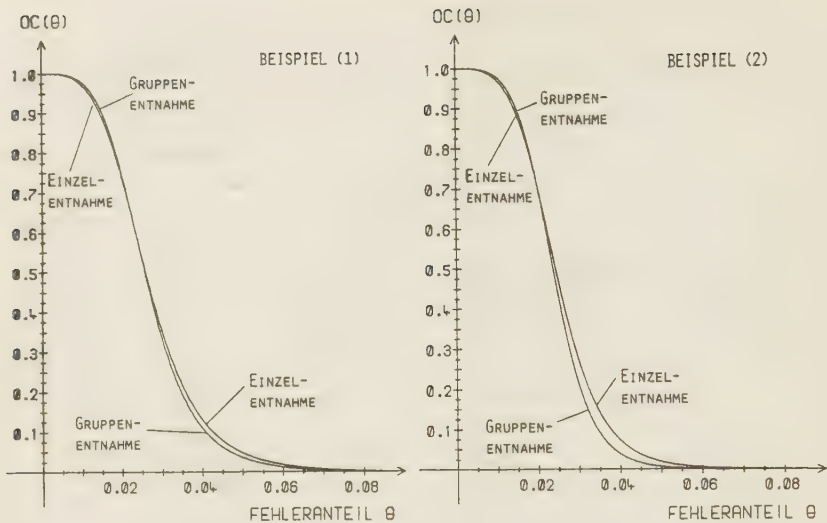


Abb. 4.24: OC-Funktionen ausgewählter offener Folgetests bei Einzel- und Gruppenauswertung

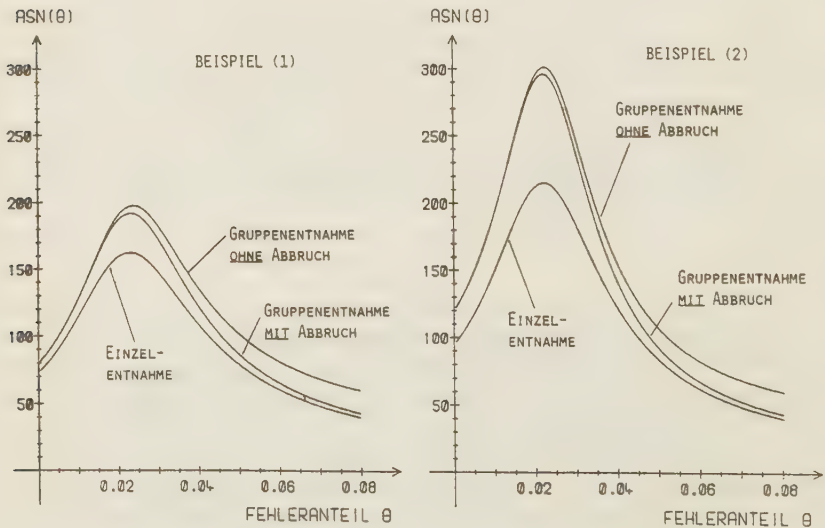


Abb. 4.25: ASN-Funktionen ausgewählter offener Folgetests bei Einzel- und Gruppenauswertung

Im Vergleich der hier tabellierten Werte der OC-Funktionen mit den in der Tabelle 3.13 abgedruckten Werten der Näherungslösung nach WALD erkennt man, daß die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster bzw. zweiter Art in beiden Beispielen deutlich geringer sind als die vorgegebenen Werte. Dies gilt bei Einzelauswertung und bei Gruppenauswertung; bei Gruppenauswertung wird in den beiden hier gewählten Beispielen vor allem die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art gegenüber der Einzelauswertung noch weiter verringert. Die OC-Funktionen verlaufen also, besonders im Falle einer Entnahme in Gruppen, steiler als die näherungsweise berechneten Funktionen; ein Vergleich der Abbildungen 3.14 und 4.24 bestätigt diese Feststellung.

Die tatsächlichen Werte der ASN-Funktionen liegen, wie ein Vergleich der in der Tabelle 4.8 gegebenen Werte mit den in der Tabelle 3.15 abgedruckten Werten zeigt, sehr deutlich über der Näherungslösung nach WALD. Bei Einzelauswertung werden in beiden Beispielen bei einem Fehleranteil von $\theta = 0,010$ die Näherungswerte um etwa 4%, bei Fehleranteilen von $\theta = 0,025$ und $0,050$ um etwa 20 % überschritten; die relativen Abweichungen nehmen mit wachsendem Fehleranteil θ zu. Bei Gruppenauswertung liegen, vor allem im Beispiel (2), die durchschnittlichen Stichprobenumfänge noch einmal über den Stichprobenumfängen bei Einzelauswertung. Dabei sind die durch einen vorzeitigen Abbruch möglichen Einsparungen für Fehleranteile unter $0,025$ sehr gering, diese Einsparungen nehmen mit wachsendem Fehleranteil θ zu. Bei einem Fehleranteil von $\theta = 0,025$ liegen die tatsächlichen Werte der ASN-Funktion bei Gruppenauswertung um etwa 50 % in Beispiel (1) und etwa 65 % in Beispiel (2) über den näherungsweise berechneten Werten. Sie liegen deutlich oberhalb der Werte abgebrochener Einfach- und Doppeltests zu diesen Beispielen und sogar über den not-

wendigen Stichprobenumfängen entsprechender nicht abgebrochener Einfachtests.

Diese Ergebnisse bestätigen, was bereits in den vorangegangenen Abschnitten dieser Arbeit ansatzweise festgestellt worden ist: Selbst im Falle der Einzelauswertung sind die von WALD entwickelten Näherungslösungen für die OC- und die ASN-Funktion eines Folgetests kaum brauchbar, bedingt durch die möglichen Überschreitungen der Bereichsgrenzen - konservative Rundung wird unterstellt - weichen die tatsächlichen Verläufe der OC- und ASN-Funktion von den näherungsweise berechneten Verläufen mehr oder weniger stark ab. Die Abweichungen nehmen mit steigendem Fehleranteil θ im allgemeinen zu, da ja die möglichen Überschreitungen der Rückweisergrenze bei den hier dargestellten Beispielen größer als die möglichen Überschreitungen der Annahmegrenze sind.¹

Besonders groß sind die Abweichungen zwischen der Näherungslösung für die ASN-Funktion eines Folgetests und dem tatsächlichen Verlauf der ASN-Funktion, wenn Gruppenauswertung unterstellt wird. Durch Vergleich der Abbildungen 4.23, 4.24 und 4.25 erkennt man, daß in dem hier gewählten Fall mit $n_d = 1/s$ die Wirkung einer Gruppenauswertung so erklärt werden kann, daß die absoluten Werte der Ordinatenabschnitte h_1 und h_2 auf die nächstgrößere ganze Zahl aufgerundet werden.

Im Falle der Auswertung in Gruppen von jeweils $n_d = 1/s = 40$ Elementen stimmen die OC-Funktion und die ASN-Funktionen des Folgetests mit den Koeffizienten $s = 0,025$ und $h_1 = h_2 = 2,0$ mit den entsprechenden Funktionen zu Beispiel (1) genau überein, und zwar unabhängig davon, ob ein Abbruch bei Erreichen der Rückweisergrenze zugelassen wird oder nicht. Ebenso stimmen in

¹ Vgl. S. 162 ff. dieser Arbeit.

diesem Fall die OC-Funktion und die ASN-Funktionen des Folgetests mit den Koeffizienten $s = 0,025$, $h_1 = 3,0$ und $h_2 = 2,0$ mit den entsprechenden Funktionen zu Beispiel (2) überein. Die Auswertung in Gruppen von jeweils $n_d = 1/s$ Elementen bewirkt also eine Nivellierung aller möglichen Folgetests auf wenige Typen mit jeweils ganzzahligen Ordinatenabschnitten ($h_1, h_2 = 1, 2, \dots$).

4.4.4 Zusammenfassung und Ausblick

Das auf den vorangegangenen Seiten dargestellte Verfahren zur Berechnung der Kenngrößen von Folgetests mit Hilfe absorbierender Markov-Ketten ermöglicht die Berechnung von Werten der OC- und der ASN-Funktion offener Folgetests anhand von Matrizenoperationen. Dieses Verfahren ist damit vor allem dann geeignet, wenn eine große Zahl von Meßwerten zu einem oder auch zu verschiedenen Folgetests mit Hilfe eines Computers berechnet werden sollen: Für die benötigten Matrizenoperationen stehen in den meisten Programmbibliotheken fertige Programme zur Verfügung. Falls kein Zugang zu einer EDV-Anlage besteht, können die Werte der OC- und ASN-Funktion unter Einschränkungen auch mit hochwertigen Taschenrechnern ermittelt werden.¹

Die errechneten und in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse zeigen deutlich die Nachteile einer Gruppenauswertung beim Folgetestverfahren auf. Die OC-Funktion verläuft wesentlich steiler als geplant und die ASN-Funktion wesentlich höher als die Näherung nach WALD. Wenn als Gruppenumfang $n_d = 1/s$ verwendet wird, wird die

¹ Zur Berechnung von $OC(\theta)$ und $ASN(\theta)$ zu einem Anteilswert θ bei Beispiel (1) mit Gruppenauswertung ohne Abbruch ist mit dem Taschenrechner Texas Instruments-59 eine Rechenzeit von etwa 2 Minuten erforderlich.

Zahl möglicher Folgetests drastisch reduziert, da bei Gruppenauswertung zum Beispiel alle Tests mit $1 < h_1 \leq 2$ und $1 < h_2 \leq 2$ (wie das hier verwendete Beispiel (1)) die gleiche OC- und die gleiche ASN-Funktion besitzen. Damit entfällt bei Gruppenauswertung ein Vorteil, den der Folgetest (Sequentialtest) anderen Typen von Tests gegenüber theoretisch besitzt, daß nämlich die Bereichsgrenzen an die zulässigen Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster bzw. zweiter Art sehr genau angepaßt werden können.¹ Der Einfluß einer Gruppenauswertung wird allerdings dann geringer sein, wenn ein kleinerer Gruppenumfang als 40, z.B. $n_d = 25$, verwendet wird. In diesem Fall werden die OC- bzw. ASN-Funktion zwischen den hier berechneten Werten für Einzelauswertung und für Gruppenauswertung liegen.

Ebenfalls große Abweichungen zwischen entsprechenden Werten bei Einzel- und bei Gruppenauswertung erhält man, wenn zusätzlich die Varianzen des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs (Werte der VSN-Funktion) für vorgegebene Fehleranteilswerte θ bestimmt werden. Auch diese Funktionswerte können, ähnlich wie die Werte der ASN-Funktion, mit Hilfe von Matrizenoperationen berechnet werden. Auf eine Darstellung der Herleitung dieser Funktion sowie der errechneten Ergebnisse ist jedoch aus den in Punkt 4.4.1 genannten Gründen verzichtet worden.

In dieser Arbeit ebenfalls nicht darstellbar ist der Lösungsweg für den Fall, daß die Steigung s der Bereichsgrenzen eine beliebige rationale Zahl $s = k/n_d$ ($k, n_d = 1, 2, \dots; k < n_d$) ist. In diesem Fall sind einige Modifikationen des hier entwickelten Ansatzes erforderlich:

¹ Vgl. z.B. WUCHERER, H., Grenzen-Berechnung "nach Maß" bei Folgestichproben hilft Prüfkosten senken, QZ 19 (1974), S. 201 ff..

Die Anzahl der nicht absorbierenden Zustände wird genau so bestimmt, wie oben dargestellt worden ist; diese Zahl ist von der Steigung der Bereichsgrenzen unabhängig. Die Zahl der absorbierenden Zustände wächst dagegen linear mit dem Wert von k , da sonst eine Differenzierung des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs nicht möglich ist. Im Falle $k = 2$ bei Gruppenauswertung ohne Abbruch sind beispielsweise vier absorbierende Zustände, je zwei im Annahme- und im Rückweisebereich, erforderlich. Die Bestimmung der zur Berechnung der OC- und ASN-Funktion erforderlichen Vektoren erfolgt analog wie in dem hier dargestellten Fall, dabei können die Elemente der Matrizen $\mathbf{Q}$ bzw. $\mathbf{R}$ vorteilhaft rekursiv berechnet werden. Auf eine weitergehende Erläuterung dieses Verfahrens soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch verzichtet werden.

4.5 Ergebnis und Prognose der weiteren Entwicklung

In den vorangegangenen Abschnitten des vierten Kapitels sind verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Kenngrößen von Folgetests dargestellt und anhand von Beispielen verglichen worden. Die vorgestellten Verfahren unterscheiden sich stark und weisen auch unterschiedliche Stärken und Schwächen auf. So ist die zuerst genannte Simulationstechnik vor allem dann gut geeignet, wenn keine sehr hohen Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse gestellt werden. Mit der Methode der variablen Inkremente¹ können mit relativ geringem Aufwand für praktische Bedürfnisse oft ausreichende Punktschätzwerte oder Schätzintervalle für die Werte der ASN- und VSN-Funktion gefunden werden. Bereits bei einer geringen Zahl von Versuchen werden die teilweise erheblichen

¹ Vgl. S. 200 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

Abweichungen zwischen entsprechenden Schätzwerten bei Einzel- und bei Gruppenauswertung bzw. zwischen den Schätzwerten und den Näherungswerten für die ASN-Funktion erkennbar.

Zur Prüfung, ob ein vorgegebener Folgetest die zulässigen Fehlerwahrscheinlichkeiten einhält oder nicht, oder zur Festlegung einer zulässigen Abbruchregel ist die Simulationstechnik dagegen weniger gut geeignet, da die Schätzwerte für die OC-Funktion selbst bei einer hohen Zahl von Versuchen relativ ungenau sind. Auch für die Verteilungsfunktion des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs sind zuverlässige Aussagen nur bei einer großen Anzahl von Versuchen möglich; in diesem Fall liefert die Rekursionstechnik bessere Ergebnisse.

Die Simulation nach der Methode der fixen Inkremente¹ eignet sich dagegen gut für Schulungszwecke, um zum Beispiel Prüfer mit der Entscheidungsregel und den Eigenschaften des Folgetestverfahrens vertraut zu machen. Dabei können bei entsprechender Technik nicht nur das Modell der Binomial- und der Hypergeometrischen Verteilung, sondern auch beliebige andere "Fehlermuster" berücksichtigt werden.² Eine weitergehende Darstellung dieses Punktes soll jedoch unterbleiben, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Da die Simulationstechnik, unabhängig davon, ob die Methode der fixen oder der variablen Inkremente angewandt wird, sehr flexibel und leicht verständlich ist, wird sie in Zukunft vermutlich eine zunehmende Verbreitung erfahren.

1 Vgl. S. 200 ff. dieser Arbeit

2 Vgl. VANASSE, Robert W., Statistical Sampling for Auditing and Accounting Decisions: A Simulation (2nd ed.), New York, St. Louis, San Francisco usw. 1976, S. 3 ff. und S. 11 ff..

Das in Abschnitt 4.3 vorgestellte Rekursionsverfahren erfordert einen relativ hohen Rechenaufwand und ist nicht so anschaulich wie die Simulationstechnik. Dieses Verfahren liefert jedoch exakte Werte für die OC-, ASN- und VSN-Funktion sowie für die Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ und die Vertrauensgrenzen (VES-Funktion) des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs geschlossener Folgetests. Vor allem die charakteristischen Verläufe der Verteilungsfunktion $F(y/\theta)$ für alternative Fehleranteilewerte und die für kleine Fehleranteile stufenförmigen Anstiege der VES-Funktion werden aus den Ergebnissen der rekursiven Berechnung sehr plastisch sichtbar. Diese Funktionen und auch die hohen Werte der ASN-Funktionen bei großzügig bemessener Abbruchregel legen beredtes Zeugnis für die Notwendigkeit einer möglichst gut angepassten Abbruchregel beim Folgetest ab.

Bei der Vorgabe einer Abbruchregel führt, wie hier gezeigt worden ist, keine der in der Literatur genannten Faustregeln zu einem guten Ergebnis: Sinnvoller erscheint demgegenüber die Bestimmung einer Abbruchregel "nach Maß" mit Hilfe eines leicht modifizierten Rekursionsverfahrens, weil sich hierdurch vor allem der maximal entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang erheblich absenken läßt. In den beiden hier gewählten Beispielen erhält man für die Abbruchgrenze n_0 zulässige Werte, die etwa 30% über den Stichprobenumfängen entsprechender Einfach- bzw. Doppeltests (ohne Abbruch) liegen, das Abbruchkriterium liegt jeweils am unteren Rande des Annahmebereiches. Die ASN-Funktionen derart "optimal angepaßter" Folgetests liegen durchweg unterhalb der ASN-Funktionen entsprechender abgebrochener Einfach- oder Doppeltests und für mittlere Fehleranteile auch unterhalb der ASN-Funktionen unmodifizierter Folgetests.

Das Rekursionsverfahren ist damit das für praktische Belange wohl wichtigste Verfahren. Da dieses Verfahren zwar

eine große Zahl von Rechenoperationen, aber nur wenig Speicherkapazität erfordert, wird es mit zunehmender Verbreitung von Mini- oder Mikro-Computern vermutlich auch in der Prüfungspraxis eine wachsende Bedeutung zur Konstruktion "optimal angepaßter" Folgetests finden.

Die in Abschnitt 4.4 vorgestellte Methode zur Berechnung der Kenngrößen von Folgetests, aufbauend auf der Theorie absorbierender Markov-Ketten, dürfte vorwiegend von theoretischem Interesse sein, da bei diesem Verfahren die Verwendung offener Folgetests mit rationaler Steigung s vorausgesetzt wird. Diese beiden Bedingungen werden im allgemeinen nicht erfüllt sein; die Voraussetzung eines offenen Folgetests - die Bereichsgrenzen sind parallel und ohne Abbruchregel - widerspricht vor allem auch dem Wunsch der Praxis, für Zwecke der Termin- bzw. Kostenplanung eine obere Grenze für den Stichprobenumfang anzugeben.

Mit Hilfe von Markov-Ketten können jedoch die Eignung verschiedener denkbarer Approximationsformeln für die OC- und die ASN-Funktion eines Folgetests überprüft und eventuell neue, besser geeignete Approximationsformeln gefunden werden. Der hier aufgezeigte Lösungsweg anhand von Matrizenoperationen dürfte anschaulicher als die in der Literatur genannten Lösungsansätze sein, die sich herkömmlicher mathematischer Methoden bedienen.¹

Ein anderes Anwendungsbeispiel wäre die Bestimmung von angepaßten Bereichsgrenzen für offene Folgetests, bei denen die vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten gerade noch eingehalten werden; die durchschnittlich möglichen Überschreitungen der Bereichsgrenzen wären darin bereits berücksichtigt.² Solche angepaßten Bereichsgrenzen

1 Vgl. S. 147 ff., S. 167 ff. und S. 180 f. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

2 Vgl. z.B. S. 162 ff. und S. 251 dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

könnten mit einem "trial- and error-" Suchverfahren relativ leicht bestimmt werden, wenn man davon ausgeht, daß die angepaßten Werte h_1^* und h_2^* für die Ordinatenabschnitte der Bereichsgrenzen die Bedingungen

$$h_1 \geq h_1^* > h_1 - s$$

und

$$h_2 \geq h_2^* > h_2 - (1 - s)$$

erfüllen müssen. Auf eine weitergehende Darstellung dieser Möglichkeiten sei hier jedoch verzichtet, da dies nicht zur Aufgabe dieser Arbeit gehört.

5 Bestimmung geeigneter Tests aus Stichprobensystemen

5.1 Vorbemerkung

In den vorangegangenen Kapiteln sind verschiedene Typen von Testverfahren dargestellt worden, die für Ordnungsmäßigkeitsprüfungen verwendbar sind: Einfachtests (einfache Annahmestichproben), Doppeltests (Doppel-Stichproben) und Folgetests (Sequentialtests) mit Einzel- oder Gruppenauswertung. Beim Einfach- und Doppeltest, in beschränktem Maße auch beim Folgetest mit Gruppenauswertung, sind durch die Vereinbarung eines Abbruchs bei Erreichen der Rückweisegrenze vor allem für große Fehleranteile erhebliche (durchschnittliche) Einsparungen möglich, ohne daß sich die Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers erster oder zweiter Art erhöhen. Verfahren zur Berechnung der entsprechenden OC- und ASN-Funktionen sind in den vorangegangenen Kapiteln dargestellt worden.

Die Bestimmung geeigneter (passender) Tests, die zu vorgegebenen Anteilswerten θ_0 und θ_A die Einhaltung der zulässigen Fehlerwahrscheinlichkeiten α und β gewährleisten, ist jedoch im allgemeinen recht aufwendig: Zulässige Doppeltests können nur durch ein "trial and error"-Suchverfahren, optimale Abbruchregeln zu Folgetests nur rekursiv ermittelt werden. Eine wesentliche Arbeitserleichterung könnte die Verwendung von Tabellen bringen, bei denen für ausgewählte Kombinationen von θ_0 , θ_A , α und β die Parameter passender Tests abgedruckt sind.

Tabellen, aus denen die Parameter n und c geeigneter Einfachtests entnommen werden können, existieren in der Literatur zum wirtschaftlichen Prüfungswesen bereits seit längerem; auf eine Darstellung dieser Tabellen kann, da sie in der angegebenen Literatur ausführlich erläutert

werden, verzichtet werden.¹ Stichprobentabellen zu Doppel- oder Folgetests sind in der Literatur zum Prüfungswesen dagegen kaum vertreten; eine Ausnahme bilden die bereits zitierten Tabellen der Annahme- und Rückweisezahlen ausgewählter Folgetests von LEFFSON, LIPPMANN und BAETGE.² Diese Tabellen können jedoch nur als bedingt brauchbar angesehen werden, da sie erstens nur eine Auswertung in Gruppen von $n_d = 25$ Elementen (oder ganzzahligen Vielfachen hiervon) zulassen und zweitens keine Aussagen über zulässige Abbruchregeln enthalten.

Ein möglicher Ausweg könnte die Auswahl von Tests aus Stichprobensystemen sein, wie sie in der statistischen Qualitätskontrolle verbreitet sind. Als Stichprobensystem wird eine Sammlung von Stichprobenplänen bezeichnet, in denen die Parameter von Einfach-, Doppel- und/oder Folgetests nach übergeordneten Gesichtspunkten gegliedert abgedruckt sind.³ Im folgenden Abschnitt 5.2 sollen die wichtigsten Merkmale solcher Stichprobensysteme kurz dargestellt und die Eignung dieser Systeme für Prüfungszwecke beurteilt werden. Anschließend ist in Kapitel 5.3 zu diskutieren, welche Kriterien bei der Konstruktion eines "Stichprobensystems für Ordnungsmäßigkeitsprüfungen" beachtet werden sollten.

1 Vgl. z.B. ARKIN, Herbert, Handbook of Sampling for Auditing (2nd ed.), New York, St. Louis, Düsseldorf usw. 1974, S. 473 ff.; BROWN, R. Gene, VANCE, Lawrence L., Sampling Tables for Estimating Error Rates or Other Proportions, Berkeley (Calif.) 1961; HILL, Henry P., ROTH, Joseph L., ARKIN, Herbert, Sampling in Auditing: A Simplified Guide and Statistical Tables, New York 1962; VANASSE, Robert W., a.a.O., S. 95 ff..

2 Vgl. LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 119 ff..

3 Vgl. z.B. Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG 95082 ..., Blatt 1 ..., S. 6

5.2 Stichprobensysteme der statistischen Qualitätskontrolle

In der statistischen Qualitätskontrolle werden Stichprobensysteme bereits seit vielen Jahren eingesetzt. Zu den Vorreitern dieser Entwicklung gehören die Tabellen von DODGE und ROMIG, die Einfach- und Doppeltests enthalten.¹ Ein weiteres grundlegendes Werk ist die von der Statistical Research Group, Columbia University (SRG) herausgegebene Monographie, die neben einer hervorragenden Einführung in die theoretischen Grundlagen eine Vielzahl von Tabellen mit Einfach-, Doppel- und Folgetests ("single sampling plans", "double sampling plans" und "sequential sampling plans") umfaßt.² Bei den Folgetests werden nur geschlossene Tests mit Auswertung in Gruppen konstanten Umfangs unterstellt, die Zahl der maximal erforderlichen Gruppen liegt zwischen drei und neun. Tests dieser Art werden auch als "Mehrfachtests" oder "Mehrfach-Stichproben" ("multiple sampling plans") bezeichnet.³

Der entscheidende Durchbruch gelang mit der Veröffentlichung des auf den Tabellen der SRG aufbauenden "Military Standard 105A".⁴ Dieses Stichprobensystem, von dem inzwischen die vierte, verbesserte Version MIL-STD 105D

1 Vgl. DODGE, ROMIG, a.a.O., S. 61 ff. und S. 181 ff.

2 Vgl. Statistical Research Group, Columbia University, Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 216 ff.

3 Vgl. z.B. Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.) VG 95082 ..., Blatt 1 ..., a.a.O., S. 6; DIN Deutsches Institut für Normung e.V., DIN 40080, Verfahren und Tabellen für Stichprobenprüfung anhand qualitativer Merkmale (Attributprüfung), Berlin, Köln 1979, S. 5 ff.; International Organization for Standardization (Ed.), ISO 2859, Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes (1st ed.), o.O. 1974, S. 5 ff..

4 Vgl. United States Department of Defense (Ed.), Military Standard 105A, Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes, Washington D.C. 1950 (zitiert bei VANCE, NETER, a.a.O., S. 54 ff.; COWDEN, D.J., a.a.O., S. 585 ff.).

existiert¹, ist das Vorbild einer Vielzahl von Stichprobensystemen, die inzwischen oft schon den Charakter nationaler oder internationaler Normen erhalten haben.² Der Military Standard und ~~einige~~ der daraus abgeleiteten Stichprobensysteme - die für den Raum der Bundesrepublik Deutschland wichtigsten sind DIN 40080 und ISO 2859³ - enthalten Einfach-, Doppel- und Mehrfachtests, die jeweils etwa den gleichen Verlauf der OC-Funktion besitzen. Bei anderen abgeleiteten Systemen sind dagegen aus Vereinfachungsgründen nur Einfach- und Doppeltests berücksichtigt worden.⁴

Eine ausführliche Darstellung der hier genannten Stichprobensysteme erscheint im Rahmen dieser Arbeit als nicht erforderlich, da diese Systeme in einigen Standardwerken und in zahlreichen Aufsätzen, z.B. in der Zeitschrift "Qualität und Zuverlässigkeit" (früher: "Qualitätskontrolle") eingehend beschrieben werden.⁵ In dieser Arbeit können nur einige Merkmale dieser Stichprobensysteme angesprochen werden.

1 Vgl. United States Department of Defense (Ed.), Military Standard 105D, Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes, Washington D.C. 1963.

2 Eine Übersicht der aus dem MIL-STD 105 bzw. dem gleichbedeutenden ABC-STD 105 abgeleiteten Stichprobensysteme gibt JOST, D., Stichprobenvorschriften und Stichprobenpläne zur attributiven (Gut/Schlecht-) Beurteilung, Teil I, QZ 21 (1976), S. 109 f..

3 Vgl. die Fußnote 3 auf der vorhergehenden Seite.

4 Vgl. Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG 95083 ..., Blatt 2: Prüfpläne für Stichprobenprüfungen, Köln 1968, S. 2 ff.; Deutsche Gesellschaft für Qualität (DGQ) e.V., (Hrsg.), Stichprobentabellen ..., a.a.O., S. 19 ff..

5 Vgl. z.B. ARKIN, H., a.a.O., S. 146 ff.; BURR, I.W., a.a.O., S. 259 ff.; DUNCAN, A.J., a.a.O., S. 191 ff.; SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 214 ff.; VANCE, NETER, a.a.O., S. 54 ff.

Die meisten dieser Stichprobensysteme sind an der sogenannten "annehmbaren Qualitätsgrenzlage" (AQL, engl. "acceptable quality level") orientiert, das ist "der maximale Anteil fehlerhafter Einheiten in Prozent ..., der für Zwecke der Stichprobenprüfung als befriedigende durchschnittliche Qualitätslage angesehen werden kann."¹ Dieser Fehleranteil, der manchmal auch als "Gutgrenze" oder "gewünschtes Fertigungsniveau" bezeichnet wird, entspricht dem in dieser Arbeit als θ_0 bezeichneten Fehleranteil, der vom Prüfer als wünschenswert angesehen wird.² Beispiele für Stichprobensysteme, die auf der AQL aufbauen, sind die von der SRG entwickelten Tabellen, der MIL-STD 105 und die darauf aufbauenden Stichprobensysteme.

Ein weiteres gebräuchliches Ordnungsmerkmal ist die "rückzuweisende Qualitätsgrenzlage" ("Schlechtgrenze", "Grenzqualität", engl. "limiting quality" oder "lot tolerance per cent defective", für die auch in der deutschsprachigen Literatur die Abkürzungen LQ oder LTPD verwendet werden. Dies ist der Fehleranteil, bei dem Ordnungsmäßigkeit nicht mehr vorliegt; er entspricht dem in dieser Arbeit mit θ_A bezeichneten Fehleranteil. Dieser Fehlerprozentsatz wird beispielsweise bei den Tabellen von DODGE und ROMIG als Ordnungskriterium verwendet.³ Daneben existieren noch weitere Kriterien, wie

1 DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (Hrsg.), DIN 40080 ..., a.a.O., S. 3. Vgl. zu den folgenden Ausführungen außerdem JOST, D., a.a.O., S. 109; Dt. Gesellschaft für Qualität e.V. (Hrsg.), Stichprobentabellen ..., a.a.O., S. 15 ff.; Dieselbe, Methoden zur Ermittlung geeigneter AQL-Werte, Köln 1975, S. 8 ff.; DÜLL, R., Das Risiko bei Stichprobenprüfung nach Plan, QZ 21 (1976), S. 282; SCHAAFSMA, WILLEMZE, a.a.O., S. 197 ff..

2 Vgl. S. 11 dieser Arbeit.

3 Vgl. DODGE, ROMIG, a.a.O., S. 4 ff..

zum Beispiel der "größte Durchschlupf"¹, die jedoch im Prüfungswesen bislang keine Bedeutung erlangt haben und die deshalb hier auch nicht behandelt werden sollen.

Die mit den hier angegebenen Anteilswerten AQL bzw. LQ verbundenen Annahmewahrscheinlichkeiten sind im allgemeinen nicht vom Prüfer frei wählbar, sondern durch das Stichprobensystem vorgegeben. So ist beispielsweise in den Tabellen der SRG der AQL-Wert immer mit einer Annahmewahrscheinlichkeit von $1 - \alpha = 0,95$ verbunden; und der LQ-Wert bzw. LTPD-Wert - falls ein solcher Wert angegeben ist - immer mit einer Annahmewahrscheinlichkeit von $\beta = 0,10$.² Die gleiche Annahmewahrscheinlichkeit von $\beta = 0,10$ ist ebenfalls bei den von DODGE und ROMIG angegebenen Stichprobentabellen zugrunde gelegt worden.³ In neueren Stichprobensystemen dagegen sind die Annahmewahrscheinlichkeiten nicht fest vorgegeben, sondern vom Umfang der Grundgesamtheit abhängig: Beim Stichprobensystem nach DIN 40080 beispielsweise kann die Annahmewahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ zu einem vorgegebenen AQL-Wert zwischen unter 0,90 bei kleinen Grundgesamtheiten (kleinen Lieferlosen) und über 0,99 bei großen Grundgesamtheiten (großen Lieferlosen) liegen.⁴

1 Der größte Durchschlupf (AOQL, average outgoing quality limit) ist der größte durchschnittlich durchgelassene Fehleranteil, wobei unterstellt wird, daß zurückgewiesene Lose komplett sortiert und fehlerhaft durch fehlerfreie Elemente ersetzt werden.

2 Vgl. Statistical Research Group, Columbia University, Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 22 ff..

3 Vgl. DODGE, ROMIG, a.a.O., S. 5 ff..

4 Vgl. Dt. Gesellschaft für Qualität (Hrsg.), Methoden ..., a.a.O., S. 9.

Eine direkte Vorgabe der zu einem bestimmten Anteilswert gewünschten Annahmewahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ bzw. β ist bei keinem dieser Stichprobensysteme möglich. Bei den Tabellen der SRG und dem MIL-STD 105 sowie den daraus abgeleiteten Stichprobensystemen (z.B. DIN 40080, ISO 2859) kann der Prüfer allerdings durch die Wahl eines von mehreren vorgegebenen "Prüfniveaus" Einfluß auf den Verlauf der OC-Funktion nehmen. Die OC-Funktionen entsprechender Einfach-, Doppel- und Mehrfachtests sind in den meisten Stichprobensystemen entweder grafisch dargestellt oder für ausgewählte Anteilswerte tabelliert, so daß die für verschiedene Prüfniveaus gültigen Annahmewahrscheinlichkeiten $1 - \alpha$ und β zumindest näherungsweise bestimmt werden können.

Keines der in der Qualitätskontrolle verbreiteten Stichprobensysteme ist so konzipiert, daß für vorgegebene Werte von θ_0 , θ_A , α und β unmittelbar die Parameter geeigneter Tests abgelesen werden können. Allenfalls besteht die Möglichkeit, sich aus den angegebenen Schaubildern oder Tabellen der OC-Funktionen diejenigen herauszusuchen, die den gewünschten Verlauf aufweisen, und dann die zu diesen OC-Funktionen gehörenden Tests festzustellen. Eine solche Auswahlmethode ist jedoch sehr mühsam und außerdem fehleranfällig.

Ein weiteres Problem ist, daß die in solchen Stichprobensystemen enthaltenen Tests nicht in jedem Fall als optimale Tests gelten können. So ist zum Beispiel in der Literatur bereits mehrfach darauf hingewiesen worden, daß einige der von DODGE und ROMIG oder im MIL-STD 105A angegebenen Doppeltests nicht optimal sind, daß also andere Doppeltests existieren, die bei praktisch gleichem Verlauf der OC-Funktion eine durchweg niedrigere ASN-Funktion als die tabellierten Tests besitzen.¹

¹ Vgl. HAMAKER, VAN STRIK, a.a.O., S. 831 ff.; WETHERILL, G.B., a.a.O., S. 189 ff..

Die Verwendung von Tests aus den hier genannten Stichprobensystemen der Qualitätskontrolle kann also nicht ohne weiteres empfohlen werden. Zu ähnlichen Ergebnissen kommen ARKIN, der diesen Tabellen nur einen "begrenzten Wert" für den Prüfer zumißt¹, sowie VANCE und NETER, die vor einem "blinden Gebrauch" solcher Tabellen warnen und in Zweifelsfällen die Bestimmung eigener maßgeschneiderter Tests empfehlen.²

5.3 Entwurf eines Stichprobensystems für Prüfungszwecke

Ein Stichprobensystem, das für Zwecke der Ordnungsmäßigkeitsprüfung verwendet werden soll, sollte so konzipiert werden, daß die für vorgegebene Werte von θ_0 , θ_A , α und β geeigneten Tests direkt bestimmt werden können. Ein Beispiel für eine mögliche Gliederung eines solchen Systems bildet die von LEFFSON, LIPPMANN und BAETGE gewählte Anordnung.³ Weiterhin sollten die Parameter entsprechender Einfach-, Doppel- und Folgetests nebeneinander abgedruckt werden, so daß der Prüfer von Fall zu Fall jeweils von neuem entscheiden kann, welchen Typ er verwenden will. Ein gutes Beispiel hierfür bilden die von der SRG entwickelten Tabellen, bei denen neben den entsprechenden Parametern auch die jeweiligen Verläufe der OC-Funktion grafisch dargestellt sind.⁴

1 Vgl. ARKIN, H., a.a.O., S. 156.

2 Vgl. VANCE, NETER, a.a.O., S. 89 f..

3 Vgl. LEFFSON, LIPPMANN, BAETGE, a.a.O., S. 119 ff..

4 Vgl. SRG, Sampling Inspection ..., a.a.O., S. 224 ff..

Die Angabe der OC-Funktionen der tabellierten Tests ist, wenn als Ordnungskriterium die Werte θ_0 , θ_A , α und β verwendet werden, nicht unbedingt erforderlich. Statt dessen sollten besser die entsprechenden Verläufe der ASN-Funktionen angegeben werden, um so den durchschnittlich erforderlichen Stichprobenumfang und damit die durchschnittlich erforderlichen Prüfungskosten abschätzen zu können. Bei Einfach- und Doppeltests sollte dabei ein Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze unterstellt werden, weil hierdurch, wie in Abschnitt 2.5 dieser Arbeit gezeigt worden ist, vor allem bei großen Fehleranteilen im Prüfungsfeld erhebliche durchschnittliche Einsparungen möglich sind.

Der Tabellieraufwand ist vom Typ des Testverfahrens abhängig: Beim Einfachtest sind nur zwei Parameter n und c , beim Doppeltest fünf Parameter n_1 , n_2 , c_1 , c_2 und d_1 erforderlich. Ein Versuch, an dieser Stelle durch die Vorgabe fester Verhältnisse zwischen einigen dieser Größen Tabellierplatz einzusparen, erscheint wenig sinnvoll, weil dadurch die Eigenschaften des Doppeltestverfahrens höchstens verschlechtert werden.¹

Beim Folgetest sind verschiedene Tabellierungskonzepte denkbar. Wenn Einzel- und Gruppenauswertung berücksichtigt werden soll, sind zur Charakterisierung eines "optimal angepassten" Folgetests² mindestens sechs Parameter erforderlich, nämlich die Koeffizienten s , h_1 und h_2 (oder s_k , f_1 und f_2) der Bereichsgrenzen sowie die einem bestimmten Gruppenumfang n_d entsprechende Abbruchregel (n_0 , c^*). Für die Koeffizienten sollten die durch die Beziehungen (3.31 ff.) bzw. (3.44 ff.) bestimmten Werte verwendet werden, wobei für die kritischen Werte A und B der allgemeinen Entscheidungsregel die konser-

¹ Vgl. S. 70 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

² Vgl. Punkt 4.3.4 dieser Arbeit.

vative Lösung gewählt werden sollte.¹ Dadurch wird die Einhaltung der zulässigen Fehlerwahrscheinlichkeiten gewährleistet, zudem ist der Rechenaufwand etwas geringer als bei der üblichen approximativen Lösung nach WALD.

Die zu vorgegebenen Koeffizienten optimal angepaßte Abbruchregel ist eine Funktion des Gruppenumfangs n_d . Mit zunehmendem Gruppenumfang wachsen, wie hier gezeigt worden ist, die Abweichungen zwischen den vorgegebenen und den tatsächlichen Verläufen der OC-Funktion; diese Abweichungen können durch eine Verringerung der Abbruchgrenze n_0 und/oder des Abbruchkriteriums c^* teilweise kompensiert werden. Wenn man den Gruppenumfang unbegrenzt wachsen läßt, erhält man im Extremfall einen Test, der dem klassischen Einfachtest entspricht, man findet als Abbruchgrenze $n_0 = n$ und $c^* = c$. Mit wachsendem Gruppenumfang werden sich also die OC- und die ASN-Funktion eines optimal angepaßten Folgetests immer mehr den entsprechenden Funktionen eines abgebrochenen Einfachtests (curtailed single sampling plan) angleichen.

Falls nicht nur die Koeffizienten der Bereichsgrenzen, sondern auch Punkte auf diesen Bereichsgrenzen tabelliert werden sollen - dies ist zum Beispiel dann erforderlich, wenn die Hypergeometrische Verteilung zugrunde gelegt wird - sind zwei Ansätze denkbar: Die Tabellierung der Annahme- und Rückweisezahlen $c(y)$ bzw. $d(y)$ für vorgegebene Stichprobenumfänge, wie sie bisher in der Literatur üblich ist, ist nur im Falle der Gruppenauswertung sinnvoll anwendbar.² Dagegen ist die Tabellierung von Annahme- und Rückweisekennzahlen $a(x)$ bzw.

1 Vgl. S. 86 f. dieser Arbeit.

2 Vgl. zu den folgenden Ausführungen S. 128 ff. dieser Arbeit und die dort angegebene Literatur.

$r(x)$ für vorgegebene Fehlerzahlen x ($x = 0, 1, \dots$) bei Einzel- und bei Gruppenauswertung in jedem Fall die platzsparendste und effizienteste Tabellierungsmethode. Erforderlich wäre in diesem Fall allerdings eine Umstellung auf die in dieser Arbeit als "Entscheidungsregel 3" bezeichnete Entscheidungsregel,¹ die sich von der in der Literatur üblichen Vorgehensweise deutlich unterscheidet.

Für Prüfungszwecke dürfte im allgemeinen die Berücksichtigung weniger Wertekombinationen für θ_0 und θ_A genügen; dabei muß ein Kompromiß zwischen Übersichtlichkeit der Tabelle und dem Streben nach Vollständigkeit gefunden werden. Für die Fehlerwahrscheinlichkeiten dürften im allgemeinen die in dieser Arbeit vorgegebenen vier Werte $\alpha, \beta = 0,01; 0,02; 0,05$ und $0,10$ ausreichend sein.

¹ Vgl. S. 100 ff. dieser Arbeit.

6 Schlußbetrachtung

In der vorliegenden Arbeit sind verschiedene Typen von Testverfahren dargestellt und auf ihre Eignung für Ordnungsmäßigkeitsprüfungen hin untersucht worden. Dabei wurden Einfach- und Doppeltests mit oder ohne Möglichkeit eines vorzeitigen Abbruchs bei Erreichen der Rückweisegrenze sowie Folgetests (Sequentialtests) in ihrer ursprünglichen, von WALD entwickelten Form oder mit modifizierten Entscheidungsregeln vorgestellt.

Einfachtests mit vorzeitigem Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze ("curtailed sampling") stellen die einfachste Form einer schrittweisen (sequentiellen) Entscheidungsregel dar; bereits hiermit sind gegenüber dem konventionellen Einfachtest bei hohen Fehleranteilen erhebliche Einsparungen möglich. Bei Verwendung von Doppeltests (mit vorzeitigem Abbruch in beiden Teilstichproben) sind sowohl bei sehr guten als auch bei sehr schlechten Prüfungsfeldern nur geringe (durchschnittliche) Stichprobenumfänge erforderlich; in den hier vorgestellten Beispielen lagen die Werte der ASN-Funktionen von Doppeltests gleichmäßig unterhalb der entsprechenden ASN-Funktionen abgebrochener Einfachtests.

Der Folgetest (Sequentialtest) nach WALD, dessen Verwendung in vielen Veröffentlichungen zum betriebswirtschaftlichen Prüfungswesen empfohlen wird, besitzt dagegen gegenüber den oben genannten Typen von Testverfahren nicht so große Vorteile, wie oft angenommen wird. In seiner meist verwandten Form mit offenen Bereichsgrenzen im Binomialmodell ist er für Prüfungszwecke kaum einsetzbar, da durch die hohe Variabilität des entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs und die hohen Werte für die Vertrauensgrenzen dieses Stichprobenumfangs (Werte der VES-Funktion) eine sinnvolle Prüfungsplanung sehr erschwert, wenn nicht unmöglich gemacht wird. Dies gilt insbesondere dann, wenn Auswertung in Gruppen unterstellt wird.

Durch Einführung einer "optimal angepaßten" Abbruchregel erhält man jedoch Folgetests mit ausgewogenen Eigenschaften, deren ASN-Funktionen allgemein unterhalb der ASN-Funktionen entsprechender Einfach- oder Doppeltests (mit Abbruch bei Erreichen der Rückweisegrenze) liegen. Im Falle einer Auswertung in Gruppen werden die Abbruchgrenze n_0 und/oder das Abbruchkriterium c^* tendenziell um so kleiner sein, je größer der Gruppenumfang n_d ist. Eine Untergrenze für n_0 und c^* bilden der minimale Stichprobenumfang n und die Annahmezahl c eines entsprechenden Einfachtests; eine Obergrenze bilden die im Falle der Einzelauswertung gültigen Werte für die Abbruchgrenze n_0 und das Abbruchkriterium c^* . Diese Abbruchgrenze und damit der maximal entscheidungsnotwendige Stichprobenumfang lag in beiden hier vorgestellten Beispielen etwa 30% über dem Stichprobenumfang n eines entsprechenden Einfachtests. Diese Ergebnisse bestätigen, was auch für den Vergleich von Einfach- und Doppeltests gilt; daß nämlich mit dem Übergang zu einem anderen Testverfahren, das einen geringeren durchschnittlichen Stichprobenumfang aufweist, im allgemeinen eine Erhöhung des maximal entscheidungsnotwendigen Stichprobenumfangs verbunden ist.

Die Bestimmung optimaler Abbruchregeln zu vorgegebenen Folgetests ist jedoch sehr rechenaufwendig und nur mit Hilfe eines Computers sinnvoll möglich. Mit wachsender Bedeutung der EDV-Prüfung dürften sich die EDV- und Programmierkenntnisse der Wirtschaftsprüfer jedoch zunehmend verbessern; zudem wird auch der Zugang zu einer EDV-Anlage - sei es durch die Schaffung von Terminalanschlüssen zu Großrechnern, sei es durch die zunehmende Verbreitung von Kleincomputern - immer mehr erleichtert. Deshalb dürften in Zukunft immer mehr Wirtschaftsprüfer oder Prüfungsgesellschaften dazu übergehen, für

ihre Bedürfnisse maßgeschneiderte Tests selbst zu errechnen.

Für diejenigen Prüfer oder Prüfungsgesellschaften, die nicht ständig Zugang zu einer EDV-Anlage haben, dürfte die Verwendung von Tests aus speziell für die Erfordernisse zugeschnittenen Stichprobentabellen die beste Lösung sein. Wenn es gelänge, ein allgemein anerkanntes Stichprobensystem für Ordnungsmäßigkeitsprüfungen aufzubauen, dürfte die Anwendung statistischer Tests bei Ordnungsmäßigkeitsprüfungen, die bislang noch keineswegs selbstverständlich ist¹, einen großen Aufschwung erfahren. Dabei dürften neben der Tabellierung angepaßter Folgetests Einfach- oder Doppeltests keinesfalls fehlen. Zur Einführung in die Technik der Stichprobenprüfung ist das Einfachtestverfahren das zweifellos bestgeeignete Verfahren, da es relativ einfach zu handhaben ist. Im nächsten Schritt sollte das Doppeltestverfahren eingeführt werden, das bei etwas höheren Anforderungen an die Qualifikation des Prüfers eine weitere Herabsetzung des durchschnittlich erforderlichen Stichprobenumfangs ermöglicht. Erst wenn die Grundlagen des Einfach- und des Doppeltestverfahrens beherrscht werden, sollte das Folgetestverfahren verwendet werden, das die höchsten Ansprüche an den Prüfer stellt, aber verglichen mit den anderen hier genannten Verfahren auch nur die niedrigsten durchschnittlichen Stichprobenumfänge erfordert.

¹ Vgl. BEDINGFIELD, JAMES P., The current State of Statistical Sampling and Auditing, The Journal of Accountancy 1975, S. 48 ff..

ANHANG

A 1: Tabelle der Funktion $E_R(d/n;\theta)$

A 2: Programm zur rekursiven Berechnung der
Kenngrößen eines Folgetests

Tabelle der Funktion $E_p(d/n; \theta)$

		e															
n	d	0.001	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.040	0.050	0.060	0.080	0.100	0.150	0.200		
60	1	3.07	12.50	19.45	22.89	24.18	24.17	23.42	20.99	18.35	15.98	12.38	9.98	6.67	5.00		
	2	1.06	3.19	9.60	16.33	22.08	26.41	29.32	30.56	31.06	29.03	24.05	19.00	13.33	10.00		
	3	0.00	0.46	2.71	6.70	11.98	17.42	22.57	27.30	30.49	36.16	33.62	29.01	19.98	15.00		
	4	0.00	0.05	0.55	2.02	4.68	8.42	12.88	22.37	30.49	35.96	32.98	36.69	26.55	20.00		
	5	0.00	0.00	0.09	0.47	1.45	3.22	5.85	13.22	21.88	29.89	38.82	41.60	32.91	24.99		
	6	0.00	0.00	0.01	0.09	0.37	1.01	2.20	6.54	13.27	21.25	35.51	42.71	38.74	29.95		
	7	0.00	0.00	0.00	0.01	0.08	0.27	0.70	2.76	6.43	13.13	28.09	39.83	43.54	34.84		
	8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.20	1.02	3.17	7.14	19.84	33.76	46.67	39.54		
	9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	0.33	1.28	3.45	12.59	26.67	47.51	43.85		
	10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	0.66	1.50	7.21	18.37	45.76	47.43		
	11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.15	0.59	3.76	11.82	41.52	49.95		
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.04	0.21	1.79	7.02	35.39	50.92		
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.07	0.78	3.83	28.29	50.02		
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.31	1.93	21.20	47.15		
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.12	0.99	14.68	42.43		
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.39	9.79	36.46			
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	6.04	29.76		
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.50	23.08		
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	1.91	15.94		
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.98	11.80		
	90	1	3.86	15.30	23.10	26.47	27.28	26.68	25.38	22.08	18.91	16.25	12.44	9.99	6.67	5.00	
		2	0.23	4.39	12.72	20.93	27.42	31.06	34.43	35.50	33.26	30.53	24.49	19.42	13.33	10.00	
		3	0.01	0.71	4.70	9.70	16.50	23.22	29.16	37.20	40.36	40.12	35.22	28.53	19.99	15.00	
		4	0.00	0.00	0.91	3.25	7.25	12.53	18.49	29.88	38.40	42.89	43.10	39.29	26.63	20.00	
		5	0.00	0.01	0.16	0.85	2.51	5.37	9.39	19.69	30.36	38.89	46.55	45.12	33.19	25.00	
		6	0.00	0.00	0.02	0.18	0.72	1.91	3.97	10.88	20.46	30.50	44.91	48.99	39.52	24.99	
		7	0.00	0.03	0.00	0.03	0.17	0.58	1.43	5.17	11.16	20.96	38.90	40.3	45.35	34.96	
		8	0.00	0.00	0.01	0.04	0.15	0.45	2.15	6.15	12.76	30.39	45.20	50.22	39.98	34.99	
		9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.12	0.79	2.61	6.94	21.49	38.37	53.55	44.66	
		10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.26	1.15	3.40	13.81	30.00	54.76	49.16	
11		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.08	0.43	1.51	8.11	21.63	53.46	53.13		
12		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.14	0.61	4.36	14.40	49.63	56.25		
13		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.04	0.23	2.16	8.88	43.66	58.12		
14		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.08	0.99	5.08	36.32	58.36		
15		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.42	2.70	28.53	56.71		
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.17	1.34	21.55	53.13			
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.62	14.80	40.72			
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	9.77	41.25			
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.11	6.09	34.02			
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	3.59	26.79		
	100	1	4.73	18.27	26.79	29.90	30.11	28.87	26.99	22.89	19.29	16.43	12.47	10.00	6.67	5.00	
		2	0.31	5.79	16.24	25.87	32.88	37.14	39.13	38.68	35.43	31.53	24.74	19.96	13.33	10.00	
		3	0.01	0.84	5.70	13.22	21.70	29.58	35.96	43.38	44.95	43.1	38.20	29.70	19.99	15.00	
		4	0.00	0.13	1.43	6.00	10.52	17.54	24.97	37.91	45.83	48.75	47.10	43.12	26.66	20.00	
		5	0.00	0.01	0.28	1.43	4.05	8.31	13.98	27.25	39.30	47.43	51.71	47.29	33.29	25.00	
		6	0.00	0.00	0.05	0.34	1.29	3.28	6.54	16.59	28.99	40.36	53.00	53.33	39.83	30.00	
		7	0.00	0.00	0.01	0.07	0.35	1.10	2.62	8.73	18.66	30.35	49.39	56.20	46.15	34.99	
		8	0.00	0.00	0.01	0.04	0.08	0.32	0.92	4.03	10.81	20.35	41.90	55.25	51.99	39.97	
		9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.08	0.28	1.65	5.49	12.25	32.44	50.50	56.94	44.91	
		10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.08	0.61	2.46	6.67	22.98	43.00	60.48	49.75	
11		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.20	1.02	3.30	14.94	33.99	62.05	54.34		
12		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.39	1.49	24.97	61.22	58.61	54.34		
13		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.13	0.62	4.95	17.07	57.86	62.23		
14		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.24	2.54	10.88	52.20	64.84		
15		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.09	1.21	6.47	44.83	56.08		
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.54	3.60	36.60	65.63			
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.22	1.68	28.37	63.29		
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.92	20.87	54.05		
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.43	14.56	53.15		
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.18	9.65	46.04		
	110	1	5.66	21.39	30.48	33.16	32.66	30.74	28.31	23.49	19.54	16.53	12.49	10.00	6.67	5.00	
		2	0.41	7.43	20.14	31.05	38.42	42.15	43.37	41.27	36.80	32.19	24.46	19.99	13.33	10.00	
		3	0.02	1.47	7.73	17.31	27.35	36.22	42.74	48.94	48.67	45.28	36.77	29.40	20.00	15.00	
		4	0.00	0.21	2.14	7.03	14.54	23.37	32.13	45.82	52.51	53.48	47.39	39.56	26.66	20.00	
		5	0.00	0.02	0.46	2.26	6.13	12.11	19.61	35.01	48.20	55.08	55.44	48.55	33.32	25.00	
		6	0.00	0.00	0.08	0.60	2.14	5.24	10.05	23.59	38.39	50.17	59.50	56.13	34.94	30.00	
		7	0.00	0.00	0.01	0.13	0.64	1.94	4.42	13.57	26.88	40.73	58.74	61.34	46.48	39.00	
		8	0.00	0.00	0.00	0.03	0.17	0.62	1.70	6.87	16.71	29.68	53.34	61.27	52.79	39.99	
		9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.18	0.58	3.9	9.31	19.52	40.55	51.39	58.05	44.98	
		10	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	0.18	1.26	4.68	11.65	34.28	59.89	63.70	59.43		
11		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	0.46	2.14	6.35	24.34	47.65	67.44	54.82		
12		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.15	0.89	3.17	15.98	38.02	69.36	59.55		
13		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.34	1.46	6.73	28.36	68.01	64.01		
14		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.12	0.62	5.81	18.62	66.91	67.44		
15		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.25	2.91	13.01	60.91	71.16		
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.09	1.43	8.00	53.70	73.25			
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.66	4.63	45.25	73.88		
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.50	23.08		
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.91		
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.98		

Tabelle der Funktion $E_p(d/n; \theta)$

n	d	θ														
		0.001	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.040	0.050	0.060	0.080	0.100	0.150	0.200	
120	1	6.71	24.64	34.14	36.23	34.35	32.33	29.37	23.92	19.70	16.59	12.49	10.00	6.67	5.00	
	2	0.53	9.31	24.36	36.40	43.66	46.82	47.12	43.33	37.70	32.62	24.93	19.99	13.33	10.00	
	3	0.02	2.00	10.16	21.93	33.63	43.01	49.32	53.61	51.00	46.83	37.10	29.95	20.00	15.00	
	4	0.00	0.31	3.00	9.61	19.27	29.64	39.70	53.61	58.26	57.17	48.46	39.79	26.67	20.00	
	5	0.00	0.04	0.72	3.38	8.82	16.78	26.18	44.42	56.66	61.63	58.01	49.25	33.33	25.00	
	6	0.00	0.00	0.14	0.98	3.36	7.88	14.55	31.71	48.23	59.39	64.44	57.94	39.98	30.00	
	7	0.00	0.00	0.02	0.24	1.09	3.18	6.97	19.75	36.33	51.47	60.55	64.79	46.00	35.00	
	8	0.00	0.00	0.00	0.05	0.31	1.12	2.93	10.67	24.43	40.29	63.85	69.19	53.13	40.00	
	9	0.00	0.00	0.00	0.01	0.09	0.35	1.05	5.24	14.77	28.63	56.82	70.21	59.44	44.90	
	10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.10	0.36	2.37	8.09	18.55	46.90	67.47	65.34	49.98	
	11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.11	0.95	4.04	11.00	35.92	61.21	70.48	54.95	
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.35	1.85	6.00	25.56	52.32	74.42	59.87	
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.12	0.48	3.02	16.93	42.00	76.68	84.68	
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.30	1.41	10.46	31.87	76.70	88.28	
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.11	0.61	6.04	22.71	74.48	73.52	
	16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.25	3.27	15.24	69.71	77.17	
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.09	1.66	9.65	62.80	79.94	
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.79	5.77	54.33	81.50	
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.36	3.22	45.07	81.53	
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	1.74	35.01	79.79	
130	1	7.42	28.01	37.73	39.10	36.98	33.68	30.22	24.23	19.81	14.62	12.50	10.00	6.67	5.00	
	2	0.67	11.41	28.89	41.84	48.81	51.10	50.39	44.95	38.48	32.26	24.93	19.99	13.33	10.00	
	3	0.03	2.66	12.97	27.04	40.13	49.79	55.56	57.96	52.05	47.90	37.29	29.99	20.00	15.00	
	4	0.00	0.44	4.22	12.86	24.68	36.99	47.64	60.48	63.12	59.92	49.11	39.00	26.67	20.00	
	5	0.00	0.06	1.08	4.85	12.18	22.31	33.58	53.36	64.39	67.01	59.72	49.62	33.33	25.00	
	6	0.00	0.01	0.23	1.52	5.01	11.30	20.07	40.69	58.03	67.65	68.01	58.83	39.99	30.00	
	7	0.00	0.00	0.04	0.40	1.77	4.93	10.37	27.21	46.59	61.98	72.72	66.98	46.04	35.00	
	8	0.00	0.00	0.01	0.09	0.54	1.89	4.71	16.14	33.58	51.63	72.91	73.29	53.26	40.00	
	9	0.00	0.00	0.00	0.02	0.15	0.64	1.90	8.57	21.95	39.26	68.38	76.89	59.78	45.00	
	10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.19	0.69	4.11	12.92	27.34	59.91	77.05	66.11	50.00	
	11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	0.23	1.79	6.98	17.49	48.98	73.44	72.03	54.99	
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.07	0.72	3.47	10.33	37.39	66.51	77.27	59.96	
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.26	1.39	5.64	26.87	51.68	71.41	68.28	
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.07	2.86	17.80	46.20	83.99	69.77	
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.27	1.35	11.14	35.41	84.56	74.48	
	16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	0.60	6.54	25.65	82.70	78.93	
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.25	3.62	17.59	78.56	82.92	
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	1.68	9.41	72.05	86.28	
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.93	7.02	63.73	88.57	
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.43	3.10	54.27	89.61		
140	1	9.00	31.46	41.23	41.76	38.77	34.80	30.90	24.46	19.88	14.64	12.50	10.00	6.67	5.00	
	2	0.82	13.74	33.64	47.29	53.73	54.98	53.21	46.20	38.97	33.00	24.99	20.00	13.33	10.00	
	3	0.04	3.44	16.19	32.58	46.82	50.42	61.36	61.45	55.56	46.63	37.39	29.99	20.00	15.00	
	4	0.00	0.62	5.65	16.58	30.71	44.50	55.56	66.89	67.00	62.00	49.49	39.96	26.67	20.00	
	5	0.00	0.09	1.56	6.72	16.23	28.64	41.64	62.14	71.23	71.29	60.82	49.81	33.33	25.00	
	6	0.00	0.01	0.35	2.26	7.17	15.55	26.57	50.23	67.41	74.77	70.49	59.39	40.00	30.00	
	7	0.00	0.00	0.07	0.65	2.72	7.28	14.72	35.79	67.33	81.76	77.37	68.31	46.06	35.00	
	8	0.00	0.00	0.01	0.16	0.90	2.99	7.18	22.71	43.67	63.11	80.31	75.99	53.31	40.00	
	9	0.00	0.00	0.00	0.04	0.26	1.09	3.12	12.94	30.49	50.94	78.63	81.65	59.92	45.00	
	10	0.00	0.00	0.00	0.01	0.07	0.36	1.22	6.67	19.32	37.82	72.41	84.46	66.44	50.00	
	11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.11	0.43	3.14	11.22	25.90	62.63	83.80	72.77	55.00	
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.14	1.35	5.59	16.49	48.90	78.46	78.74	59.99	
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.28	1.36	5.28	27.67	61.66	84.40	69.93	
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.20	1.36	5.28	27.67	61.66	84.40	69.93	
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.58	2.70	18.59	50.30	91.29	74.83	
	16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.23	1.29	11.76	39.00	92.29	79.63	
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.09	0.58	7.02	20.87	91.49	84.22	
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.24	3.95	20.02	87.49	88.49	
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	2.11	13.28	81.39	92.22	
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	1.06	8.37	73.35	95.17	
150	1	10.26	34.99	44.64	44.22	40.34	35.74	31.43	24.62	19.92	14.65	12.50	10.00	6.67	5.00	
	2	1.01	16.30	38.61	52.69	58.36	59.46	55.60	47.17	39.30	33.17	24.99	20.00	13.33	10.00	
	3	0.05	4.36	19.79	38.49	53.59	62.81	66.66	64.33	56.82	49.11	37.44	30.00	20.00	15.00	
	4	0.00	0.84	7.38	20.86	37.28	52.48	63.35	72.58	70.24	63.46	49.72	39.98	26.67	20.00	
	5	0.00	0.13	2.17	9.02	20.97	35.69	50.16	70.51	77.10	74.60	61.50	49.41	33.33	25.00	
	6	0.00	0.02	0.53	3.25	9.90	20.63	33.98	60.03	76.09	80.70	72.16	59.69	40.00	30.00	
	7	0.00	0.00	1.00	1.44	4.01	11.21	20.05	45.29	67.46	80.55	80.73	69.08	45.66	35.00	
	8	0.00	0.00	0.02	0.27	1.42	4.53	10.45	30.94	54.92	74.20	86.09	77.67	53.32	40.00	
	9	0.00	0.00	0.00	0.06	0.45	1.77	4.86	18.55	40.49	63.11	87.24	84.86	59.97	45.00	
	10	0.00	0.00	0.00	0.01	0.13	0.62	2.04	10.23	27.03	49.68	83.77	89.86	66.58	50.00	
	11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.20	0.78	5.15	16.92	36.09	75.99	91.92	73.10	55.00	
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	2.34	9.07	24.37	65.93	90.47	79.45	60.00	
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.09	1.01	5.12	15.31	52.44	85.39	85.46	64.99	
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.44	2.52	8.97	39.86	77.07	80.08	69.98	
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.15	1.15	4.91	28.56	66.39	95.38	74.95	
	16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.20	2.52	19.32	54.51	98.56	79.84	
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.20	1.22	12.34	42.64	99.99	89.73	
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.55	7.46	31.76	99.20	84.44	
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.24	4.27	22.53	96.21	93.90	
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	4.32	15.24	74.00	97.99	

Tabelle der Funktion $E_p(d/n; \theta)$

		K													
		θ													
n	d	0.001	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.040	0.050	0.060	0.080	0.100	0.150	0.200
100	1	11.59	38.57	47.93	46.47	41.71	36.52	31.85	24.73	19.95	16.66	12.50	10.00	6.67	5.00
	2	1.21	19.08	43.74	58.00	62.68	61.54	57.62	47.90	39.53	33.23	25.00	20.00	13.33	10.00
	3	0.07	5.44	23.77	44.70	60.36	68.87	71.45	66.67	57.75	49.43	40.41	30.00	20.00	15.00
	4	0.00	1.11	9.43	25.66	44.31	60.18	72.71	77.52	72.71	64.50	49.84	39.99	26.67	20.00
	5	0.00	0.16	2.96	11.80	26.41	43.37	58.96	76.31	82.03	77.10	61.92	49.95	33.33	25.00
6	0.00	0.02	0.77	4.52	13.23	26.56	42.17	61.81	83.89	85.50	73.24	59.84	40.00	30.00	
	7	0.00	0.00	0.17	1.48	5.71	14.10	26.37	55.44	78.08	88.17	81.00	66.51	46.67	35.00
	8	0.00	0.00	0.03	0.42	2.16	6.59	14.61	39.51	66.33	84.51	90.41	78.45	53.33	40.00
	9	0.00	0.00	0.01	0.11	0.73	2.75	7.23	25.45	51.57	75.23	94.17	86.94	59.99	45.00
	10	0.00	0.00	0.00	0.02	0.22	1.03	3.23	14.91	36.80	62.19	93.56	91.61	66.63	50.00
11	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.35	1.32	7.99	24.20	47.79	88.37	97.97	73.24	55.00	
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.11	0.49	3.94	14.71	31.18	79.16	92.97	79.77	60.00
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	0.76	4.35	14.22	53.87	91.28	92.18	69.99
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.30	2.13	8.31	40.88	82.34	97.69	74.99
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.98	4.56	29.36	71.10	102.36	79.96
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.42	2.35	19.97	58.71	105.81	84.91
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.17	1.15	12.88	47.17	107.63	89.81
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.53	7.88	34.90	107.44	94.60
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.23	4.58	25.12	104.96	99.20
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
170	1	13.00	42.19	51.10	48.54	42.91	37.16	32.19	24.81	19.97	16.66	12.50	10.00	6.67	5.00
	2	1.44	22.08	49.01	63.18	66.68	64.25	59.30	48.45	39.69	31.27	25.00	20.00	13.33	10.00
	3	0.09	6.67	28.11	51.14	67.04	74.55	75.71	68.54	58.42	49.37	37.48	30.00	20.00	15.00
	4	0.00	1.45	11.81	30.98	51.69	68.66	77.99	81.75	74.62	65.22	49.92	40.00	26.67	20.00
	5	0.00	0.23	3.93	15.07	32.49	51.53	67.86	85.43	86.08	78.95	62.17	49.98	33.33	25.00
6	0.00	0.03	1.08	6.12	17.22	33.28	51.01	79.32	90.72	89.28	73.94	59.92	40.00	30.00	
	7	0.00	0.00	0.25	2.13	7.88	18.69	33.63	65.97	87.83	94.57	94.68	66.67	46.67	35.00
	8	0.00	0.00	0.05	0.65	3.16	9.26	16.69	49.45	77.11	93.75	93.74	74.28	53.33	40.00
	9	0.00	0.00	0.01	0.17	1.13	4.19	10.34	33.61	63.36	86.84	99.53	88.00	66.00	45.00
	10	0.00	0.00	0.00	0.04	0.36	1.63	4.91	20.82	47.59	75.07	101.65	96.09	66.66	50.00
11	0.00	0.00	0.00	0.01	0.11	0.59	2.12	11.82	33.03	60.57	99.20	102.24	73.33	55.00	
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.20	0.84	6.18	21.24	45.55	92.49	105.99	79.91	60.00
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.31	2.96	12.70	32.18	81.06	105.63	86.44	65.00
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.10	1.34	7.08	21.25	68.98	103.69	92.81	70.00
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.56	3.69	13.17	55.11	97.14	98.99	75.00
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.22	1.80	7.68	41.78	87.90	104.50	79.99
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.73	4.22	30.07	75.83	109.33	84.97
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.36	2.19	20.56	62.43	113.04	89.44
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.15	1.07	13.36	50.04	115.23	94.86
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	8.27	38.10	115.53	99.71
180	1	14.47	45.85	54.13	50.42	43.94	37.69	32.45	24.87	19.98	16.66	12.50	10.00	6.67	5.00
	2	1.70	25.29	54.36	68.18	70.36	66.02	60.70	49.86	39.19	33.30	25.00	20.00	13.33	10.00
	3	0.11	8.07	32.80	57.75	73.55	79.82	79.46	70.03	58.90	49.77	37.49	30.00	20.00	15.00
	4	0.01	1.85	14.53	36.77	59.33	75.82	84.66	85.32	76.07	65.71	49.99	40.00	26.67	20.00
	5	0.00	0.33	5.11	18.85	39.17	60.06	76.70	91.79	89.38	80.29	62.31	49.99	33.33	25.00
6	0.00	0.05	1.49	8.08	21.88	40.74	60.32	88.36	96.57	92.19	74.37	59.96	40.00	30.00	
	7	0.00	0.01	0.37	2.98	10.56	24.91	41.78	76.60	96.32	99.82	85.73	64.87	46.67	35.00
	8	0.00	0.00	0.08	0.96	4.48	12.60	25.75	60.11	87.71	101.80	95.75	79.62	53.33	40.00
	9	0.00	0.00	0.02	0.27	1.69	5.89	14.26	42.91	75.48	97.50	103.52	90.00	66.67	50.00
	10	0.00	0.00	0.00	0.07	0.58	2.98	7.16	28.00	59.40	87.75	108.07	97.68	66.66	50.00
11	0.00	0.00	0.00	0.02	0.18	0.95	3.28	16.78	43.32	73.97	108.53	115.15	73.32	55.00	
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.34	1.39	9.27	29.34	58.44	104.49	110.70	79.96	60.00
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.11	0.53	4.75	18.51	41.30	96.16	111.81	86.57	55.00
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.19	2.28	10.42	31.32	113.94	113.94	91.11	70.00
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	1.01	6.02	19.72	70.59	110.07	99.50	75.00
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.42	3.12	12.16	56.19	102.96	115.63	80.00
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.16	1.52	7.07	42.57	92.84	111.31	84.99
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.89	39.70	88.39	109.70	115.24	89.99
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.03	21.09	67.17	120.23	120.23	94.99
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.13	1.00	13.81	53.79	122.78	99.90
190	1	16.01	49.53	57.04	52.14	44.83	38.13	32.65	24.91	19.99	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00
	2	1.99	28.70	59.95	72.00	73.73	68.07	61.86	49.17	39.08	33.31	25.00	20.00	13.33	10.00
	3	0.14	9.86	31.72	54.46	79.04	84.65	82.72	71.20	59.29	49.86	37.50	30.00	20.00	15.00
	4	0.01	2.33	17.61	42.99	67.14	83.36	90.80	88.28	77.13	66.04	49.98	40.00	26.67	20.00
	5	0.00	0.44	6.52	23.15	46.81	68.82	85.32	97.39	91.93	81.24	62.39	50.00	33.33	25.00
6	0.00	0.07	2.01	10.45	27.21	48.85	69.95	96.78	101.47	94.39	74.63	59.98	40.00	30.00	
	7	0.00	0.01	0.53	3.00	10.32	30.32	50.68	87.09	104.05	104.01	80.41	69.94	46.67	35.00
	8	0.00	0.00	0.12	1.38	1.68	16.67	32.78	71.26	99.07	108.61	97.25	79.80	53.33	40.00
	9	0.00	0.00	0.02	0.42	2.46	8.21	19.09	53.72	87.07	107.22	106.43	89.45	60.00	45.00
	10	0.00	0.00	0.00	0.11	0.88	3.68	10.99	36.42	71.88	90.82	113.01	98.65	66.67	50.00
11	0.00	0.00	0.00	0.03	0.29	1.45	4.07	22.94	54.85	87.48	116.05	107.05	73.33	55.00	
	12	0.00	0.00	0.00	0.01	0.09	0.55	2.16	13.35	38.97	72.12	114.85	114.10	74.99	60.00
	13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.19	0.88	7.21	25.55	55.93	109.17	119.18	86.03	65.00
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.34	3.62	16.03	40.83	99.42	121.60	93.24	70.00
	15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.12	1.70	9.33	28.09	86.57	120.80	94.78
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.75	5.10	18.24	71.99	116.50	106.19	80.00
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.31	2.63	11.19	51.13	108.76	112.35
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	1.28	6.50	43.26	98.08	118.11
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.59	3.58	31.26	85.29	123.22
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.26	1.87	21.57	71.44	127.39

Tabelle der Funktion $E_R(d/n; \theta)$

		θ													
n	d	0.001	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.040	0.050	0.060	0.080	0.100	0.150	0.200
200															
1	17.62	53.22	59.81	53.69	45.00	38.48	32.81	28.94	19.99	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00	
2	2.30	52.30	65.21	77.58	76.78	70.45	62.80	49.40	39.91	33.32	25.00	20.00	13.33	10.00	
3	0.17	11.39	43.13	71.23	85.86	89.04	85.55	72.12	59.48	49.91	37.50	30.00	20.00	15.00	
4	0.01	2.90	21.06	49.60	75.02	90.58	96.40	90.72	77.95	66.26	49.99	40.00	26.67	20.00	
5	0.00	0.50	8.19	27.97	54.11	77.69	93.61	102.25	93.95	81.91	62.44	50.00	33.33	25.00	
6	0.00	0.10	2.65	13.25	33.20	57.52	79.72	104.48	105.52	96.02	74.78	59.99	40.00	30.00	
7	0.00	0.01	0.73	5.40	17.60	37.34	60.22	97.22	110.76	107.29	86.84	69.97	46.67	35.00	
8	0.00	0.00	0.18	1.93	8.30	21.52	40.73	82.63	108.39	114.25	98.26	79.90	53.33	40.00	
9	0.00	0.00	0.04	0.61	3.48	11.12	24.05	64.32	99.39	115.64	104.67	89.70	60.00	45.00	
10	0.00	0.00	0.01	0.18	1.31	5.20	13.78	46.01	84.67	110.95	116.68	99.24	66.67	50.00	
11	0.00	0.00	0.00	0.05	0.45	2.22	6.99	30.36	67.34	100.65	121.96	108.25	73.33	55.00	
12	0.00	0.00	0.00	0.01	0.14	0.87	3.26	18.54	50.90	86.22	123.46	116.34	80.00	60.00	
13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.31	1.41	10.52	34.73	69.69	120.62	122.97	86.65	65.00	
14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	0.56	5.56	22.60	53.17	113.39	127.50	93.30	70.00	
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.21	2.75	13.81	38.30	102.31	129.29	99.91	75.00	
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.07	1.28	7.94	26.09	88.45	127.83	104.46	80.00	
17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.56	4.31	16.82	73.19	122.88	112.88	85.00	
18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.23	2.21	10.28	57.93	114.54	119.08	90.00	
19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	1.07	5.96	43.84	103.32	124.91	95.00	
20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.49	3.29	31.74	90.04	130.15	99.99	
225															
1	21.93	62.41	66.13	56.94	47.08	39.11	33.06	24.97	20.00	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00	
2	3.21	42.10	78.73	88.05	83.15	73.84	64.46	49.73	39.97	33.33	25.00	20.00	13.33	10.00	
3	0.27	16.59	57.55	88.02	99.55	98.19	90.94	73.58	59.80	49.97	37.50	30.00	20.00	15.00	
4	0.02	4.73	31.26	87.49	94.54	106.96	108.03	96.97	79.13	66.53	50.00	40.00	26.67	20.00	
5	0.00	1.06	13.59	42.22	74.91	99.60	112.33	111.45	97.16	82.62	62.49	50.00	33.33	25.00	
6	0.00	0.20	4.92	22.30	50.87	80.87	103.77	120.36	112.52	98.39	74.95	60.00	40.00	30.00	
7	0.00	0.03	1.53	10.17	30.15	58.01	85.87	119.98	123.40	112.47	87.32	69.99	46.67	35.00	
8	0.00	0.00	0.41	4.08	15.82	37.15	64.09	110.48	128.07	123.92	99.48	79.98	53.33	40.00	
9	0.00	0.00	0.10	1.46	7.43	21.43	43.41	94.04	125.50	131.37	111.16	89.94	60.00	45.00	
10	0.00	0.00	0.02	0.47	3.15	11.22	26.83	74.10	115.85	133.59	121.93	99.83	66.67	50.00	
11	0.00	0.00	0.00	0.14	1.22	5.37	15.22	54.16	100.63	129.88	131.14	109.57	73.33	55.00	
12	0.00	0.00	0.00	0.04	0.43	2.36	7.96	36.80	82.19	120.40	138.01	119.00	80.00	60.00	
13	0.00	0.00	0.00	0.01	0.14	0.96	3.86	23.32	63.15	106.20	141.67	127.86	86.67	65.00	
14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.36	1.74	13.81	45.69	89.03	141.40	135.77	93.33	70.00	
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.13	0.73	7.67	31.16	70.89	136.80	142.23	99.99	75.00	
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.29	4.01	20.06	53.62	127.93	146.65	106.64	80.00	
17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.11	1.97	12.22	38.55	115.40	146.44	113.28	85.00	
18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.92	7.05	26.36	100.24	147.09	119.87	90.00	
19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.40	3.86	17.18	83.76	142.32	126.39	95.00	
20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	2.01	10.65	67.27	134.15	132.78	100.00	
250															
1	26.62	71.48	71.63	59.43	44.08	39.48	33.19	24.99	20.00	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00	
2	4.33	52.89	91.84	97.01	87.95	76.10	65.43	49.88	39.99	33.33	25.00	20.00	13.33	10.00	
3	0.40	23.00	73.21	104.10	111.04	104.99	94.46	74.32	59.93	49.99	37.50	30.00	20.00	15.00	
4	0.03	7.20	43.66	86.67	112.96	120.57	116.53	97.37	79.65	66.62	50.00	40.00	26.67	20.00	
5	0.00	1.81	20.92	59.31	96.89	119.98	127.67	117.27	98.73	83.15	62.50	50.00	33.33	25.00	
6	0.00	0.37	8.39	34.44	71.78	105.20	125.82	131.61	116.34	99.39	74.99	60.00	40.00	30.00	
7	0.00	0.07	2.89	17.34	46.67	82.13	112.22	138.05	131.14	114.91	87.46	70.00	46.67	35.00	
8	0.00	0.01	0.87	7.69	26.97	57.58	90.97	135.27	141.45	129.02	99.86	80.00	53.33	40.00	
9	0.00	0.00	0.23	3.05	13.99	36.52	67.33	123.69	145.66	148.64	112.09	89.99	60.00	45.00	
10	0.00	0.00	0.06	1.09	6.57	21.10	45.69	105.51	142.78	148.63	123.97	99.97	66.67	50.00	
11	0.00	0.00	0.01	0.35	2.82	11.16	28.56	84.01	132.87	151.68	135.17	109.91	73.33	55.00	
12	0.00	0.00	0.00	0.10	1.11	5.44	16.50	62.52	117.18	149.02	145.18	119.76	80.00	60.00	
13	0.00	0.00	0.00	0.03	0.40	2.46	8.86	43.55	97.84	140.52	153.32	129.43	86.67	65.00	
14	0.00	0.00	0.00	0.01	0.14	1.03	4.43	28.45	77.32	126.99	158.83	138.76	93.33	70.00	
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.40	2.07	17.47	57.85	109.55	160.91	147.50	100.00	75.00	
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.15	0.91	10.11	41.02	90.34	158.97	155.27	106.66	80.00	
17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.38	5.52	27.58	71.12	152.72	161.62	113.33	85.00	
18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.15	2.85	17.62	53.46	142.34	165.99	119.99	90.00	
19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	1.40	10.70	38.39	128.45	167.83	126.63	95.00	
20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.65	6.19	26.34	112.07	166.65	133.26	100.00	
275															
1	31.68	80.31	76.36	61.31	48.74	39.70	33.26	25.00	20.00	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00	
2	5.64	64.53	104.38	104.52	91.50	77.56	65.98	49.95	40.00	33.33	25.00	20.00	13.33	10.00	
3	0.57	30.63	89.67	119.00	120.51	109.87	96.69	74.68	59.97	50.00	37.50	30.00	20.00	15.00	
4	0.04	10.58	58.08	106.32	129.59	131.19	122.47	98.67	79.86	66.65	50.00	40.00	26.67	20.00	
5	0.00	2.89	30.36	78.69	118.85	137.40	139.53	120.75	99.46	83.27	62.50	50.00	33.33	25.00	
6	0.00	0.65	13.31	49.68	94.90	128.88	144.71	139.07	118.29	99.78	75.00	60.00	40.00	30.00	
7	0.00	0.15	5.02	27.29	66.89	108.13	137.20	151.30	135.51	115.98	87.49	70.00	46.67	35.00	
8	0.00	0.02	1.66	13.25	24.08	81.97	119.22	155.40	149.83	131.48	99.96	80.00	53.33	40.00	
9	0.00	0.00	0.49	5.75	23.84	56.40	95.17	150.37	150.65	145.65	112.39	90.00	60.00	45.00	
10	0.00	0.00	0.13	2.25	12.26	35.56	70.02	136.85	163.50	157.54	124.69	99.99	66.67	50.00	
11	0.00	0.00	0.03	0.80	5.77	20.58	47.62	117.04	160.39	166.00	136.72	109.98	73.33	55.00	
12	0.00	0.00	0.01	0.26	2.49	10.99	30.05	94.05	150.31	169.87	148.24	119.95	80.00	60.00	
13	0.00	0.00	0.00	0.08	1.00	4.45	17.05	71.06	134.27	166.28	158.86	129.87	86.67	65.00	
14	0.00	0.00	0.00	0.02	0.37	2.51	9.68	50.54	114.18	160.48	168.02	139.68	93.33	70.00	
15	0.00	0.00	0.00	0.01	0.13	1.08	4.98	33.69	91.39	148.08	175.04	149.29	100.00	75.00	
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.44	2.40	21.46	71.11	130.97					

Tabelle der Funktion $E_R(d/n; \theta)$

n	d	θ															
		0.001	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.040	0.050	0.060	0.080	0.100	0.150	0.200		
300	1	37.08	88.85	80.38	62.73	49.18	39.83	33.30	25.00	20.00	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00		
	2	7.21	76.88	116.04	110.70	94.07	78.49	66.29	49.98	40.00	33.33	25.00	20.00	13.33	10.00		
	3	0.79	39.48	106.51	132.43	127.99	113.28	98.05	74.86	59.99	50.00	37.50	30.00	20.00	15.00		
	4	0.06	14.81	74.23	125.73	144.06	134.67	126.47	99.34	79.95	66.66	50.00	40.00	26.67	20.00		
	5	0.00	1.00	41.96	99.67	139.79	152.95	146.29	122.74	99.77	83.31	62.50	50.00	33.33	25.00		
	6	0.00	1.08	19.45	67.77	119.08	150.69	160.02	143.73	119.24	99.92	75.00	60.00	40.00	30.00		
	7	0.00	0.23	8.14	40.26	90.09	134.40	159.42	160.40	137.83	116.41	87.50	70.00	46.67	35.00		
	8	0.00	0.04	2.95	21.19	61.10	109.00	146.76	170.57	154.69	132.58	99.99	80.00	53.33	40.00		
	9	0.00	0.01	0.94	9.99	37.45	80.75	124.98	172.45	168.58	148.09	122.47	90.00	60.00	45.00		
	10	0.00	0.00	0.27	4.26	20.69	54.88	98.00	165.33	178.01	162.33	124.91	100.00	66.67	50.00		
	11	0.00	0.00	0.07	1.66	10.68	34.37	72.22	149.98	181.57	174.47	137.26	110.00	73.33	55.00		
	12	0.00	0.00	0.02	0.59	5.03	19.92	49.23	128.61	178.31	183.43	149.41	119.99	80.00	60.00		
	13	0.00	0.00	0.00	0.20	2.19	10.73	31.33	104.19	168.11	198.11	161.18	129.97	86.67	65.00		
	14	0.00	0.00	0.00	0.06	0.89	5.19	18.66	79.77	151.02	187.58	172.26	139.93	93.33	70.00		
	15	0.00	0.00	0.00	0.02	0.34	2.53	10.43	57.77	131.14	181.36	182.22	149.82	100.00	75.00		
	16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	1.12	5.49	39.61	108.25	169.57	190.47	159.60	106.67	80.00		
	17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.47	2.72	25.75	85.36	153.01	196.35	169.16	113.33	85.00		
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	1.26	15.90	64.31	133.06	199.14	178.33	120.00	90.00			
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.57	9.33	46.30	111.39	190.22	186.89	126.67	95.00		
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.24	5.22	31.88	89.72	193.20	194.50	133.33	100.00		
350	1	48.84	104.84	86.65	64.57	49.66	39.94	33.32	25.00	20.00	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00		
	2	11.03	102.88	136.48	119.70	97.19	79.44	66.56	50.00	40.00	33.33	25.00	20.00	13.33	10.00		
	3	1.42	60.66	139.82	154.47	138.20	117.17	99.36	74.97	60.00	50.00	37.50	30.00	20.00	15.00		
	4	0.13	26.29	110.39	161.68	166.32	150.28	130.75	99.85	79.99	66.67	50.00	40.00	26.67	20.00		
	5	0.01	9.00	71.36	143.59	176.11	174.63	156.81	124.41	99.96	83.33	62.50	50.00	33.33	25.00		
	6	0.00	2.59	39.03	110.66	166.44	186.09	180.67	148.12	119.46	99.99	75.00	60.00	40.00	30.00		
	7	0.00	0.66	18.51	75.11	141.50	182.52	193.17	170.00	139.55	116.63	87.50	70.00	46.67	35.00		
	8	0.00	0.14	7.73	45.44	108.89	165.02	193.99	188.55	158.73	133.22	100.00	80.00	53.33	40.00		
	9	0.00	0.03	2.68	24.75	76.27	137.73	182.74	201.88	176.87	149.68	125.50	90.00	60.00	45.00		
	10	0.00	0.00	0.97	12.23	48.89	106.35	161.32	208.08	193.12	165.84	124.99	100.00	66.67	50.00		
	11	0.00	0.00	0.30	5.53	28.84	76.17	133.45	205.84	206.33	181.39	137.48	110.00	73.33	55.00		
	12	0.00	0.00	0.08	2.30	15.72	50.75	103.52	194.87	215.16	195.83	149.95	120.00	80.00	60.00		
	13	0.00	0.00	0.02	0.88	7.96	31.54	57.39	176.16	218.32	204.47	162.36	130.00	86.67	65.00		
	14	0.00	0.00	0.01	0.32	3.75	18.35	51.64	151.86	214.91	218.40	174.67	140.00	93.33	70.00		
	15	0.00	0.00	0.00	0.11	1.66	10.02	33.33	124.73	204.67	224.61	186.76	149.99	100.00	75.00		
	16	0.00	0.00	0.00	0.03	0.69	5.15	20.30	97.61	188.14	226.16	198.46	159.98	106.67	80.00		
	17	0.00	0.00	0.00	0.01	0.27	2.50	11.70	72.80	166.64	222.36	209.51	169.94	113.33	85.00		
	18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	1.14	6.39	51.77	142.00	212.95	219.51	179.87	120.00	90.00		
	19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.50	3.32	35.14	116.47	194.22	227.97	189.73	126.67	95.00		
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.21	1.84	22.78	91.01	179.02	234.30	199.44	133.33	100.00		
400	1	61.74	119.21	91.02	65.56	49.86	39.98	33.33	25.00	20.00	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00		
	2	15.87	129.87	152.97	125.34	98.71	79.80	66.64	50.00	40.00	33.33	25.00	20.00	13.33	10.00		
	3	2.32	65.00	170.84	170.43	133.94	118.86	99.80	74.99	60.00	50.00	37.50	30.00	20.00	15.00		
	4	0.24	42.12	149.25	191.73	180.76	155.62	132.42	99.97	80.00	66.67	50.00	40.00	26.67	20.00		
	5	0.02	16.47	107.83	185.99	203.34	187.24	163.56	124.46	99.99	83.33	62.50	50.00	33.33	25.00		
	6	0.00	5.37	66.40	158.45	207.46	209.90	191.44	149.49	119.98	100.00	75.00	60.00	40.00	30.00		
	7	0.00	1.50	35.58	119.96	192.94	219.42	213.52	173.47	139.92	116.66	87.50	70.00	46.67	35.00		
	8	0.00	0.37	16.85	81.47	164.11	215.32	226.90	196.07	159.73	133.32	100.00	80.00	53.33	40.00		
	9	0.00	0.09	7.14	56.04	128.08	196.85	249.27	216.11	179.28	149.95	125.50	90.00	60.00	45.00		
	10	0.00	0.02	2.73	28.00	92.05	168.05	219.71	232.01	198.17	166.53	125.00	100.00	66.67	50.00		
	11	0.00	0.00	0.95	14.36	61.15	134.05	199.33	241.99	215.92	182.98	137.50	110.00	73.33	55.00		
	12	0.00	0.00	0.31	6.19	27.69	100.04	171.00	244.47	231.68	199.15	150.00	120.00	80.00	60.00		
	13	0.00	0.00	0.09	2.98	21.63	69.99	138.99	238.47	244.38	214.77	162.49	130.00	86.67	65.00		
	14	0.00	0.00	0.02	1.21	11.60	45.99	106.37	224.02	252.81	229.45	174.97	140.00	93.33	70.00		
	15	0.00	0.00	0.01	0.46	5.84	28.45	77.22	202.25	255.79	242.58	187.42	150.00	100.00	75.00		
	16	0.00	0.00	0.00	0.17	2.76	16.61	53.13	175.23	252.41	253.39	199.61	160.00	106.67	80.00		
	17	0.00	0.00	0.00	0.06	1.23	9.16	34.68	145.58	242.31	261.01	212.09	170.00	113.33	85.00		
	18	0.00	0.00	0.00	0.02	0.52	4.79	21.52	115.92	225.00	264.51	224.15	179.99	120.00	90.00		
	19	0.00	0.00	0.00	0.01	0.21	2.38	12.71	88.48	203.90	263.10	235.83	189.98	126.67	95.00		
	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	1.13	7.15	64.75	178.18	256.29	264.89	199.98	133.33	100.00		
500	1	90.43	142.90	96.06	66.37	49.98	40.00	33.33	25.00	20.00	16.67	12.50	10.00	6.67	5.00		
	2	28.81	183.12	175.49	130.75	99.75	79.98	66.66	50.00	40.00	33.33	25.00	20.00	13.33	10.00		
	3	5.25	145.94	221.34	188.55	148.55	119.83	99.98	75.00	60.00	50.00	37.50	30.00	20.00	15.00		
	4	0.68	87.19	264.86	232.25	194.45	159.22	133.24	100.00	80.00	66.67	50.00	40.00	26.67	20.00		
	5	0.07	41.98	192.90	254.09	233.89	197.26	166.26	124.99	100.00	83.33	62.50	50.00	33.33	25.00		
	6	0.01	16.90	143.13	250.18	262.09	232.20	198.63	149.97	120.00	100.00	75.00	60.00	40.00	30.00		
	7	0.00	5.80	93.36	223.13	274.51	261.37	229.49	174.89	140.00	116.67	87.50	70.00	46.67	35.00		
	8	0.00	1.78	54.21	181.11	268.69	281.46	257.37	199.65	159.99	133.33	100.00	80.00	53.33	40.00		
	9	0.00	0.48	28.32	134.41	285.64	289.39	280.20	224.04	179.97	150.00	112.50	90.00	60.00	45.00		
	10	0.00	0.12	13.42	91.62	209.74	263.34	295.55	247.63	199.91	166.66	125.00	100.00	66.67	50.00		
	11	0.00	0.03	5.82	57.62	167.40	263.58	301.13	264.74	219.76	183.33	137.50	110.00	73.33	55.00		
	12	0.00	0.01	2.32	33.58	124.67	323.01	294.13	264.36	239.39	199.98	150.00	120.00	80.00	60.00		
	13	0.00	0.00	0.86	18.21	87.61	194.60	278.46	305.09	259.49	216.44	162.50	130.00	86.67	65.00		
	14	0.00	0.00	0.29	9.22	51.64	154.32	215.44	315.47	277.05	233.18	175.00	140.00	93.33	70.00		
	15	0.00	0.00	0.09	4.38	35.76	116.06	217.51	319.04	294.18	249.63	187.50	150.00	100.00	75.00		
	16	0.00	0.00	0.03	1.95	20.93	82.86	177.99	314.71	309.							

Programm zur rekursiven Berechnung der Kenngrößen

```

C      SEQUENTIELLER VERHAELTNISTEST MIT EINZELAUSWERTUNG
C      VERSION IV
C      STAND 17.03.80
C      FUER OFFENE ODER GESCHLOSSENE BEREICHSGRENZEN
C
C      Y=1,...,N0      STICHPROBENUMFANG
C      X=0,1,...,M      FEHLERZAHLEN
C      C(Y)             ANNAHMEZAHL BEIM STICHPROBENUMFANG Y
C      D(Y)             RUECKWEISEZAHL BEIM STICHPROBENUMFANG Y
C      W(X)             WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG DER FEHLER
C
0001      IMPLICIT INTEGER (I-N),REAL*8 (A-H,O-Z)
0002      INTEGER C,CL,D,DL,X,Y,YL,YS
0003      LOGICAL*1 UPRINT, FALSE, /
0004      DIMENSION C(900),D(900),W(30),SW(30),F(900)
0005      FC=0.95
C
C      EINGABE DER PARAMETER DES TESTS
C
0006      1  READ(5,1002,END=99) N0,S,H1,H2,TOP
0007      IX=-1
0008      IZ=0
0009      YS=1
0010      10  READ(5,1000,END=99) IQ,THEU,QPRINT,THEU,THEM
0011      IF (I4.EQ.9) GOTO 1
0012      IF (THEU.GT.0.) THETA=THEU
C
C      INITIALISIERUNG EINES DURCHLAUFES
C
0013      12  Y=0
0014      YL=0
0015      M=1
0016      LC=0
0017      DL=1
0018      GF=0.
0019      AS=0.
0020      VSN=0.
0021      FRK=0.
0022      FRK=0.
0023      Fw=1.
0024      FS=0.
0025      THEQ=1.00-THETA
0026      W(1)=1.
C
C      BERECHNUNG DER BEREICHSGRENZEN (FALLS NOTWENDIG)
C
0027      IF (IX.EQ.IQ) GOTO 15
0028      CALL SVTGB (C+D+S+H1+H2+N0,YS,IQ,TOP)
0029      IF (.NOT.QPRINT) PRINT 115,S+H1+H2+N0,C(N0),IQ,TOP
C
C      BERECHNUNG DER WAHRSCHEINLICHKEITEN EINER PERIODE
C
0030      15  CONTINUE
0031      IF (QPRINT) PRINT 115,S+H1+H2+N0,C(N0),IQ,TOP
0032      Y=Y+1
0033      CL=C(Y)
0034      FA=0.
0035      FR=0.
0036      X=M
0037      M=M+1
0038      W(M)=W(X)*THETA
0039      IF (X.LE.1) GOTO 27
0040      W(X)=W(X)*THEQ+W(X-1)*THETA
0041      X=X-1
0042      GOTO 25
0043      27  W(1)=W(1)*THEQ
0044      IF (Y.LT.YS) GOTO 55
0045      IF (D(Y).GT.DL) GOTO 40
0046      35  FR=FR+W(M)
0047      M=M-1
0048      IF (D(Y).EQ.DL) GOTO 40
0049      DL=DL-1
0050      IF (M.GT.0) GOTO 35
0051      40  FRK=FRK+FR
0052      42  CONTINUE
0053      IF (CL.LT.YL) GOTO 48
0054      FA=FA+W(1)
0055      YL=YL+1
0056      M=M-1
0057      IF (M.LT.1) GOTO 48
0058      DO 45 X=1,M
0059      45  W(X)=W(X+1)
0060      GOTO 42
0061      48  FAK=FA+FA
0062      FS=FA+FR
0063      Fw=Fw-FA+FR
0064      IF (Fw.LT.0.) Fw=0.
0065      GF=FAK+FRK
0066      F(Y)=GF
0067      50  CONTINUE
0068      IF (LC.EQ.1.OR.GF.LT.FC) GOTO 55
0069      YC=1.*Y
0070      LC=1
0071      55  DL=D(Y)
0072      ASN=ASN+Y*FS
0073      VSN=VSN+Y*Y*FS
0074      IF (M.LT.1) GOTO 40

```

Programm zur rekursiven Berechnung der Kenngrößen

```

0075      SW(1)=FAK
0076      UD 58 X=1,M
0077      50 SW(X+1)=SW(X)+W(X)
C
C      AUSGABE DER KENNGROSSEN EINER PERIODE
C
0078      IF (QPRINT) PRINT 130,Y,CL,DL,FA,FAK,FR,FRK,GF
0079      *      FAK,(SW(X+1),X=1,M)
      IF (Y=NO) 20,70,90
C
C      ABSCHLUSS UND AUSWERTUNG EINES DURCHLAUFES
C
0080      60 CONTINUE
0081      IF (QPRINT) PRINT 130,Y,CL,DL,FA,FAK,FR,FRK,GF
0082      70 CONTINUE
0083      VSN=VSN-ASN*ASN
0084      IF (QPRINT,OR,(IX,EQ,1)) PRINT 118,FC
C      IF (MOD(IZ,5),EQ,0) PRINT 100
0095      IZ=IZ+1
0086      PRINT 121,THETA,FAK,ASN,VSN,YC
C
C      VORBEREITUNG EVTL. NACHFOLGENDER DURCHLAUFE
C
0087      80 CONTINUE
C      PRINT 1111,(F(J),J=1,NO)
0088      IX=10
0089      IF (THETA,EQ,0.) GOTO 10
0090      THETA=THETA+THEU
0091      IF (THETA-THETA,LE,1.D-12) GOTO 12
0092      GOTO 10
0093      90 PRINT 110,Y,YS,NO
0094      99 STOP
0095      100 FORMAT (' ',12X)
0096      110 FORMAT (' FEHLERHAFTER INDIZIERUNG! Y =',I5,' YS =',I5,' NO =',I5)
0097      115 FORMAT (' SEQUENTIALTEST MIT DEN PARAMETERN: S =',F10.6,
*      ' H1 =',F10.6,' H2 =',F10.6,' 10 =',F10.6,' 3X =',F10.6,
*      ' I4 =',I4,' I4 =',I4,' I0 =',I2,' TOP =',F7.4/10X)
0098      118 FORMAT (' S =',F10.6,' H1 =',F10.6,' H2 =',F10.6,' 10 =',F10.6,' 3X =',F10.6,
*      ' I4 =',I4,' I4 =',I4,' I0 =',I2,' TOP =',F7.4/10X)
0099      121 FORMAT (' YC =',F10.6,' THETA =',F10.6,' THETA =',F10.6,
*      ' THETA =',F10.6,' THETA =',F10.6)
0099      121 FORMAT (' YC =',F10.6,' THETA =',F10.6,' THETA =',F10.6,
*      ' THETA =',F10.6,' THETA =',F10.6)
0100      130 FORMAT (' X =',I4,' Y =',F10.6,' YS =',F10.6,' NO =',I5)
0101      1000 FORMAT (' I1 =',F9.5,' I10 =',F10.5)
0102      1002 FORMAT (' I5 =',F15.6)
0103      1111 FORMAT (' F10.6)
0104      END

0001      SUBROUTINE SVTBG (KA,KH,S,H1,H2,KM,KS,IQ,TOP)
C      BERECHNUNG DER BEREICHSGRENZEN FÜR DEN SEQUENTIALTEST NACH A. WALD
C
C      IQ=0: OFFENE BEREICHSGRENZEN
C      IQ=1: WIRTSCHAFTLICHE ABBRUCHENTSCHEIDUNG
C      IQ=2: UNWIRTSCHAFTLICHE ABBRUCHENTSCHEIDUNG
C
C      TOP (0<TOP<2): LAGE DES ABBRUCHKRITERIUMS
C      TOP=0: AUF DER ANNAHMEGERADEN
C      TOP=2: AUF DER KUECKWEISUNGSGERADEN
C      TOP=1: SYMMETRISCH ZU DEN BEREICHSGRENZEN
C
0002      REAL*8 S,H1,H2,TOP
0003      INTEGER KA(1),KH(1)
0004      M=0.999999
0005      KS=M2/(1.-S)*R
0006      IF (KS=M1/S,GT,0.) KS=M1/S
0007      DO 10 K=1,KM
0008      A=S*K-H1
0009      KA(K)=A+0.000001
0010      IF (A,LT,0.) KA(K)=A-R
0011      10 KR(K)=H2+N+S*K
0012      IF (IQ) 80,70,20
0013      20 CONTINUE
0014      IF ((TOP,LT,0.) OR, (TOP,GT,2)) GOTO 85
0015      KA(KM)=A*(H1+H2)/Z,*TOP
0016      KR(KM)=KA(KM)+1
0017      IF (IQ=2) 30,70,80
0018      30 KL=KM(KM)
0019      40 K=K-1
0020      IF (K,LE,KL) GOTO 50
0021      KR(K)=KL
0022      GOTO 40
0023      50 K=KM
0024      KL=KA(KM)
0025      K=K-1
0026      KL=KL-1
0027      IF (K,GE,KL) GOTO 70
0028      KA(K)=KL
0029      GOTO 60
0030      70 RETURN
0031      80 PRINT 90,IQ
0032      85 PRINT 95,TOP
0033      90 FORMAT (' 10X,FEHLERHAFTER PARAMETERWERT IQ =',I5)
0034      95 FORMAT (' 10X,FEHLERHAFTER PARAMETERWERT TOP =',E10.3)
0035      99 STOP
0036      END

```

Literaturverzeichnis

- ANDERSON, Oskar, Zum Problem der Wahrscheinlichkeit a posteriori in der Statistik, Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik 83 (1947), S. 489-518, wiederabgedruckt in ANDERSON, Oskar, Ausgewählte Schriften, Bd. 2 (hrsg. von KELLERER, H. u. a.), Tübingen 1963, S. 683-712.
- ARKIN, Herbert, Handbook of Sampling for Auditing and Accounting, Vol I: Methods (2nd ed.), New York, San Francisco, Toronto, London 1974.
- ARMITAGE, Peter, Restricted Sequential Procedures, Biometrika 44 (1957), S. 9-26.
- AROIAN, Leo A., Sequential Analysis, Direct Method, Technometrics 10 (1968), S. 125-132.
- DERSELBE, Applications of the Direct Method in Sequential Analysis, Technometrics 18 (1976), S. 301-306.
- DERSELBE, Moments of the Decisive Sample Number and of the Average Time to Termination of Sequential Tests. Communications in Statistics A5 (1976), S. 1041-1045.
- AX, Johannes, Der Sequentielle Test als Hilfsmittel der Marktforschung, GFM-Mitteilungen zur Markt- und Absatzforschung, 14 (1968), S. 45-48.
- BAKER, A.G., Properties of some Tests in Sequential Analysis. Biometrika 37 (1950), S. 334-346.
- BAMBERG, Günter, BAUR, Franz, Statistik, München, Wien 1980.
- BASLER, H., Bestimmung kostenoptimaler Prüfpläne mittels des Mini-Max-Prinzips. Metrika 12 (1967/1968), S. 115-154.
- BARTENSLAGER, H., Bestimmung der Schranken des Sequentialquotiententests zu gegebenen Fehlern erster und zweiter Art. In: HENN, Rudolf (Hrsg.), Operations Research Verfahren VII (Methods of Operations Research VII), Meisenheim am Glan 1977, S. 54-70.
- BAUMANN, Heinz-Dieter, GREIS, Peter, Statistische Prüfung. Eine praxisnahe Einführung in die Grundbegriffe mit Beispielen aus der Drahtindustrie, Düsseldorf 1978.
- BEDINGFIELD, James P., The current State of Statistical Sampling and Auditing, The Journal of Accountancy, Dec. 1975, S. 48-55.
- BHATE, D.H., Approximation to the Distribution of Sample Size for Sequential Tests, I. Tests of Simple Hypotheses. Biometrika 46 (1959), S. 130-138.

- BLEYMÖLLER, Josef, Simulation. Manuskript zur Vorlesung.
Münster 1979.
- BLEYMÖLLER, Josef, GEHLERT, Günther, Statistische Formeln
und Tabellen, München 1979.
- BLEYMÖLLER, Josef, GEHLERT, Günther, GÖLICHER, Herbert,
Statistik für Wirtschaftswissenschaftler,
WiSt-Studienkurs, München 1979.
- BOOK, Stephen A., Statistics, Basic Techniques for Solving
Applied Problems, New York, St. Louis, ...,
Düsseldorf, u. a. 1977.
- BRETZKE, Wolf-Rüdiger, HÖVERMANN, Klaus, LÖCHERBACH, Ger-
hard, Zur Problematik der Verteilungshypothe-
sen bei der Anwendung von Stichprobenverfah-
ren im Rahmen von Unternehmensprüfungen, BFuP,
24 (1972), S. 633-641.
- BROSS, I., Sequential Medical Plans, Biometrics 8 (1952),
S. 188 ff.
- BUCHNER, Robert, Bewußte Auswahl oder Zufallsauswahl bei
der aktienrechtlichen Pflichtprüfung, WPg 14
(1961), S. 657-659 (wiederabgedruckt in
WYSOCKI, HAGEST (Hrsg.), Praxis des Prüfungs-
wesens, S. 86 ff.).
- BUCHNER, Robert, KRANE, H.G., REUTER, H.H., Zur Anwendung
des Bayesschen Theorems bei Buchprüfungen auf
Stichprobenbasis, ZfB 41 (1971), S. 1-26.
- BUCHNER, Robert, REUTER, Hans Henner, Der Hypothesentest -
ein Mittel zur Steigerung der Wirtschaftlich-
keit bei Buchprüfungen, BFuP 24 (1972), S.
533-550.
- BÜCKER, Rüdiger, Lösungsmöglichkeiten von Entscheidungs-
problemen unter Anwendung der Bayesschen Ent-
scheidungslehre, dargestellt am Beispiel eini-
ger betriebswirtschaftlicher Entscheidungssi-
tuationen, Diss. Münster 1972.
- Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung (Hrsg.), VG
95082 Statistische Qualitätskontrolle, Attri-
butprüfung,
Blatt 1: Begriffe, Köln 1969;
Blatt 2: Anwendung der Prüfpläne für Stichpro-
benprüfung, Köln 1968.
- DASSELBE, VG 95083, Statistische Qualitätskontrolle, Attri-
butprüfung,
Blatt 1: Zeichen, Formeln und Abkürzungen,
Köln 1965;
Blatt 2: Prüfpläne für Stichprobenprüfungen,
Köln 1968.

- BURR, Irving W., Elementary Statistical Quality Control, New York, Basel 1979.
- CAMERON, J.M., Tables for constructing and for computing the operation characteristics of single-sampling plans, Industrial Quality Control 9 (1952), S. 37-39.
- CAMPBELL, G.A., Bell System Technical Journal 2 (1923), S. 95 ff.
- CHOI, S.C., Truncated Sequential Designs for Clinical Trials based on MARKOV Chains, Biometrics 24 (1968), S. 159 ff.
- CHOI, S.C., CLARK, V.A., Sequential Decision for a Binomial Parameter with Delayed Observations, Biometrics 26 (1970), S. 411 ff.
- CHUNG, J.H., Sequential Sampling from Finite Lots when the proportion Defective is Small, JASA 45 (1950), S. 557-589.
- CHUNG, Kai Lai, Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse (übersetzt aus dem Englischen von H. VOGT), Berlin, Heidelberg, New York 1978.
- COGGINS, P.P., Some general Results of Elementary Sampling Theory for Engineering ..., Bell System Technical Journal 7 (1928), S. 44 ff.
- COHEN, A. Clifford, Curtailed Attribute Sampling, Technometrics 12 (1970), S. 295-298.
- COLTON, Theodore, McPHERSON, Klim, Two-Stage Plans Compared with Fixed-Sample-Size and Wald SPRT Plans, JASA 71 (1976), S. 80-86.
- CORNELIUSSEN, A.H., LADD, D.W., On Sequential Tests of the Binomial Distribution, Technometrics 12 (1970), S. 635-646.
- COWDEN, Dudley J., Statistical Methods in Quality Control, Englewood Cliffs (N.J.) 1957.
- CRAIG, C.C., The Average Sample Number for Truncated Single and Double Attributes Acceptance Sampling Plans, Technometrics 10 (1968), S. 685-692.
- CYERT, R.M., Test-checking and the Poisson Distribution - A further comment, Accounting Review 32 (1957), S. 395 ff.

- Deutsche Arbeitsgemeinschaft für Statistische Qualitätskontrolle (ASQ) beim Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung (AWF) e.V. (Hrsg.), Begriffserläuterungen und Formelzeichen im Bereich der Statistischen Qualitätskontrolle, ASQ/AWF 4, Berlin, Köln o.J.
- Deutsche Gesellschaft für Qualität (DGQ) e.V. (Hrsg.), Stichprobentabellen zur Attributprüfung (nach DIN 40080), Erläuterungen und Handhabung (5. Aufl.), Berlin, Köln, Frankfurt/M. 1973.
- Dieselbe, Methoden zur Ermittlung geeigneter AQL-Werte, DGQ-SAQ 26; Eine Ergänzung zu DGQ-SAQ-ÖPWZ 1, Berlin, Köln, Frankfurt/M. 1975.
- DODGE, Harold F., ROMIG, Harry G., Sampling Inspection Tables, Single and Double Sampling (2nd, revised and expanded ed.), New York, London, Sydney 1959.
- DÜLL, R., Das Risiko bei Stichprobenprüfung nach Plan, QZ 21 (1976), S. 282.
- DUNCAN, Acheson J., Quality Control and Industrial Statistics (3rd ed.), Homewood (Ill.) 1965, S. 147 ff.
- ELLIOT, R.K., ROGERS, J.R., Relating Statistical Sampling to Audit Objectives. The Journal of Accountancy (1972), S. 46 ff.
- European Organization for Quality Control (Hrsg.), Glossary of Terms used in Quality Control (4th ed.), o.O. 1976.
- FELLER, William, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I (3rd ed., revised printing), New York, London, Sydney o.J. (1970).
- FERBER, R., Statistical techniques in Market Research, New York, Toronto, London 1949.
- FERGUSON, Thomas S., Mathematical Statistics, A Decision Theoretic Approach, New York, London 1967.
- FERSCHL, F., Markovketten, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems (ed. by BECKMANN, M., KÖNZI, H.P.) 35, Berlin, Heidelberg, New York 1970.
- FISZ, Marek, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik (8. Aufl.), Berlin 1976.
- FITZNER, D., Bedingte und unbedingte Bayes Prüfpläne für die Gut-Schlecht-Prüfung. In: Proceedings in Operations Research 6 (1976), S. 204 ff.
- FITZNER, Dieter, LENZ, Hans-J., Zur Konstruktion kostenoptimaler Prüfpläne für die Gut-Schlecht-Prüfung, AStA 59 (1975), S. 119-134.

- GEIGER, W., Einige Grundgedanken zum Begriff "Prüfschärfe", QZ 21 (1976), S. 97-100.
- GELLERT, W. u. a. (Hrsg.), Kleine Enzyklopädie/Mathematik, Frankfurt/M., Zürich 1972.
- GHOSH, B.K., Sequential Tests of Statistical Hypotheses, Reading (Mass.), Menlo Park, London, Don Mills 1970.
- GIRSHICK, M.A., MOSTELLER, Frederick, SAVAGE, L.J., Unbiased Estimates for Certain Binomial Sampling Problems with Applications, AMS 17 (1946), S. 13-23.
- GRAF, HENNING, STANGE, Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik (2., völlig neu bearb. Aufl.), Berlin, Heidelberg, New York 1966.
- GRANT, Eugene L., Statistical Quality Control (3rd ed.), New York u. a. 1964.
- GUENTHER, William C., The Average Sample Number for Truncated Double Sample Attribute Plans, Technometrics 13 (1971), S. 811-816.
- DERSELBE, Sampling Inspection in Statistical Quality Control, London, High Wycombe 1977.
- HALD, A., The Determination of Single Sampling Attribute Plans with Given Producer's and Consumer's Risk. Technometrics 9 (1967), S. 401-415.
- DERSELBE, A Note on the Determination of Attribute Sampling Plans of Given Strength. Technometrics 19 (1977), S. 211 ff.
- HALD, Anders, MØLLER, Uffe, The ASN Function for Curtailed Single Sampling by Attributes, Technometrics 18 (1976), S. 307-312.
- HALDANE, J.B.S. On a Method of Estimating Frequencies, Biometrika 33 (1945), S. 222-225.
- HAMAKER, Hugo C., Theorie der Stichprobenschemas. Philips' Technische Rundschau 11 (1949/50), S. 264-274.
- HAMAKER, H.C., CHABOT, J.J.M. Taudin, WILLEMZE, F.G., Stichprobenschemas und Stichprobentabellen in der Praxis. Philips' Technische Rundschau 11 (1949/50), S. 370-379.
- HAMAKER, H.C., VAN STRIK, R., The Efficiency of Double Sampling for Attributes. JASA 50 (1955), S. 830-849.

- HAMMERSLEY, J.M., HANDSCOMB, D.C., Monte Carlo Methods.
London, New York (reprinted) 1965.
- HARNETT, Donald L., MURPHY, James L., Introductory Statistical Analysis, Reading (Mass.), Menlo Park (Calif.) u. a. 1975.
- HARTER, H. Leon, A new table of percentage points of the chi-square distribution, *Biometrika* 51 (1964), S. 231 ff.
- HASTINGS, N.A.J., PEACOCK, J.B., Statistical Distributions, London 1974.
- HENGARTNER, Walter, THEODORESCU, Radu, Einführung in die Monte-Carlo-Methode, München, Wien 1978.
- HENGST, Martin, Einführung in die mathematische Statistik und ihre Anwendung, B.I-Hochschultaschenbücher 42/42a, Mannheim 1967.
- HILL, Henry P., ROTH, Joseph L., ARKIN, Herbert, Sampling in Auditing, A Simplified Guide and Statistical Tables, New York 1962.
- HÖVERMANN, K., Phasen der Gewinnung stichprobenfundierter Prüfurteile bei Jahresabschlußprüfungen, *WPg* 29 (1976), S. 257-264.
- Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V. (Hrsg.), Fachgutachten Nr. 1/67: Grundsätze ordnungsmäßiger Durchführung von Abschlußprüfungen. In: Fachgutachten und Stellungnahmen des IdW auf dem Gebiet der Rechnungslegung und Prüfung, Düsseldorf, Ergänzung 1967, S. 29 ff. (ebenfalls abgedruckt in: WYSOCKI, Kl. v., Grundlagen ..., a.a.O., S. 248 ff.; WYSOCKI, HAGEST, a.a.O., S. 1 ff.; Die Wirtschaftsprüfung 20 (1967), S. 158 ff.).
- International Organization for Standardization (Ed.), ISO 2859, Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes (1st ed.), o.O. 1974.
- JOHN, Bernd, Wirtschaftliche Pläne für messende Prüfung bei Kenntnis der Qualitätszahlverteilung (a-priori-Verteilung), Diss. Aachen 1964.
- JOHNSON, Norman L., KOTZ, Samuel, Discrete Distributions, Boston, New York, Atlanta, usw. 1969.
- JOST, Dieter, Stichprobenvorschriften und Stichprobenpläne zur attributiven (Gut/Schlecht-) Beurteilung, Teil I und Teil II, *QZ* 21 (1976), S. 109 f. und S. 129 f.
- KARLIN, Samuel, TAYLOR, Howard M., A First Course in Stochastic Processes (2nd ed.), New York, San Francisco, London 1975.

- KARUS, Horst, Sequential-Analyse. Die Methode und ihre Anwendung unter besonderer Berücksichtigung der Probleme des Industriebetriebes. Diss. Köln 1960.
- KEMENY, John G., SNELL, J. Laurie, Finite Markov Chains, New York, Heidelberg, Berlin 1976.
- KEMENY, J.G., SNELL, J.L., KNAPP, Anthony W., Denumerable Markov Chains (2nd ed.), New York, Heidelberg, Berlin 1976.
- KEMENY, J.G., SCHLEIFER, A.jr., SNELL, J.L., THOMPSON, G.L., Mathematik für die Wirtschaftspraxis, Berlin 1966.
- KEMP, K.W., Formulae on Calculating the Operating Characteristic and the Average Sample Number of Some Sequential Tests, JRSS B 20 (1958), S. 379-386.
- KEMPERMAN, J.H.B., The Passage Problem for a Stationary Markov Chain, Chicago 1961.
- KENDALL, Maurice G., STUART, Alan, The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1: Distribution Theory (3rd ed.), London, High Wycombe 1969; Vol. 2: Interference and Relationship (3rd ed.), London 1973.
- KOBELT, Helmut, Statistik für Fortgeschrittene, Teil I (3. Aufl.), Manuskript zur Vorlesung, Münster 1975.
- KÖCHER, D., MATT, G., OERTEL, C., SCHNEEWEISS, H., Einführung in die Simulationstechnik. DGOR-Schrift Nr. 5, Hrsg.: Dt. Gesellschaft für Operations Research, Frankfurt/M. 1972.
- KOHLAS, Jürg, Stochastische Methoden des Operations Research, Stuttgart 1977.
- KOLLER, Horst, Simulation und Planspieltechnik. Berechnungsexperimente in der Betriebswirtschaft. Wiesbaden 1969.
- KRETSCHMER, Franz-Josef, Sequentielle Untersuchungspläne zur Innerbetrieblichen Überwachung des Qualitätsniveaus von Fleischererzeugnissen, Diss. FU Berlin 1973.
- KREYSZIG, Erwin, Statistische Methoden und ihre Anwendungen (6. Aufl.), Göttingen 1977.
- KRÜGER, Siegfried, Simulation - Grundlagen, Techniken, Anwendungen, Berlin, New York 1975.

- LAHRES, Hans, Einführung in die diskreten Markoff-Prozesse und ihre Anwendungen, Braunschweig 1964.
- LEFFSON, Ulrich, Wirtschaftsprüfung, Wiesbaden 1977.
- LEFFSON, U., LIPPMANN, Klaus, BAETGE, Jörg, Zur Sicherheit und Wirtschaftlichkeit der Urteilsbildung bei Prüfungen, Bd. 1 der Schriftenreihe des Instituts für Revisionswesen der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, hrsg. von U. LEFFSON, Düsseldorf 1969.
- LEHMANN, E.L., Testing Statistical Hypotheses (3rd printing), New York, London, Sydney 1964.
- LEVENTHAL, B., Numerical Solutions to some Problems in Sequential Analysis, Ph.D. Thesis, London 1975.
- DERSELBE, Algorithm AS 107, Operating Characteristics and Average Sample Number for a General Class of Sequential Sampling Plans, Applied Statistics 26 (1977), S. 98-106.
- LIEBERMANN, Gerald J., OWEN, Donald B., Tables of the Hypergeometric Distribution, Stanford (Calif.) 1961.
- MAXIM, L.D., CULLEN, D.E., COOK, F.X.jr., Optimal Acceptance Sampling Plans for Auditing "Batched" Stop and Go vs. Conventional Single-Stage Attributes Plans, Accounting Review 51 (1976), S. 97-109.
- MCPHERSON, Klim, Algorithm AS 67, The Evaluating of Absorption Probabilities in Sequential Binomial Sampling, Applied Statistics 23 (1974), S. 83-86.
- McRAE, T.W., Statistical Sampling for Audit and Control, London, New York, Sydney, Toronto 1974.
- MEIER, Robert C., NEWELL, William T., PAZER, Harold L., Simulation in Business and Economics, Englewood Cliffs, New Jersey 1969.
- MENDENHALL, William, REINMUTH, James E., Statistics for Management and Economics (3rd ed.), North Scituate (Mass.) 1978.
- MENGES, Günter, Das Sequentialtestverfahren, insbesondere seine betriebswirtschaftliche Anwendung, ZfB 28 (1958), S. 75-81.
- DERSELBE, Grundriß der Statistik, Teil 1: Theorie (2., erw. Aufl.), Opladen 1972.

- MERTENS, Peter, Simulation, Stuttgart 1969.
- MIHRAM, G. Arthur, Simulation. Statistical Foundations and Methodology, New York, San Francisco, London 1972.
- MILLER, Frederick J., Optimum Double Sampling Plans for the Binomial Case, Unpublished Master's Thesis, Univ. of Wyoming 1968.
- MOOD, Alexander M., GRAYBILL, Franklin A., BOES, Duance C., Introduction to the theory of statistics (3rd ed.), Tokyo, Auckland, Düsseldorf u. a. 1974.
- MÜLLER, P. Heinz, NEUMANN, Peter, STORM, Regina, Tafeln der mathematischen Statistik (2., verb. Aufl.), München, Wien 1977.
- NAG, Numerical Algorithmus Group, FORTRAN Library Manual Mark 7, Vol. 5, Oxford 1978, G05 - Random Number Generators, G05CAF, S. 1 ff.
- NAYLOR, Thomas H., Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems, New York, London, Sydney, Toronto 1971.
- NAYLOR, T.H., BALINTFY, J.L., BURDICK, D.S., CHU, K., Computer Simulation Techniques, New York, London, Sydney 1966.
- OTT, Lyman, An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis, North Scituate (Mass.) 1977.
- PAGE, E.S., An Improvement to WALD's Approximation for Some Properties of Sequential Tests, JRSS B 16 (1954), S. 136-139.
- PATIL, G.P., On the Equivalence of the Binomial and Inverse Binomial Acceptance Sampling Plans and an Acknowledgement, Technometrics 5 (1963), S. 119-121.
- DERSELBE, On the Evaluation of the Negative Binomial Distribution with Examples, Technometrics 2 (1960), S. 501 ff.
- PAUL, Henning, Zur Anwendung binomialverteilter Stichproben bei Unternehmensprüfungen, ZfB 44 (1974), S. 111-124.
- PHATAK, A.G., BHATT, N.M., Estimation of the Fraction Defective in Curtailed Sampling Plans by Attributes, Technometrics 9 (1967), S. 219-228.

- PÓLYA, George, Exact formulas in the sequential analysis of attributes. University of California publications in mathematics, New Series, 1 (1948), S. 229-240.
- REUTER, Hans Henner, Prüfungsumfang und Urteilsbildung im Rahmen einer Buchprüfung auf Stichprobenbasis. Frankfurt/M., Zürich 1975.
- RICHTER, Artur, Prüfung der Ordnungsmäßigkeit des Rechnungswesens. Ein Beitrag zur Prüfungstechnik, ZfB 20 (1950), S. 142 ff. (wiederabgedruckt in: WYSOCKI, HAGEST (Hrsg.), a.a.O., S. 193 ff.
- ROBINSON, Julia, A note on exact sequential analysis. University of California publications in mathematics, New Series 1 (1948), S. 241-246.
- ROMANO, Albert, Applied Statistics for Science and Industry, Boston, London, Sydney, Toronto 1977.
- SACHS, Lothar, Angewandte Statistik, Statistische Methoden und ihre Anwendungen (5., neubearb. und erw. Aufl. der "Statistischen Auswertungsmethoden"), Berlin, Heidelberg, New York 1978.
- SARKADI, K., VINCZE, I., Mathematical Methods of Statistical Quality Control. New York, London 1974.
- SCHAAFSMA, A.H., WILLEMZE, F.G., Moderne Qualitätskontrolle. Statistische und Organisatorische Grundlagen der Qualitätsgestaltung (7. Aufl.), Hamburg 1973.
- SCHAICH, Eberhard, Schätz- und Testmethoden für Sozialwissenschaftler, München 1977.
- SCHAICH, E., KÖHLE, D., SCHWEITZER, W., WEGNER, F., Statistik II für Volkswirte, Betriebswirte und Soziologen, München 1975.
- SCHEIBER, V., Berechnung der OC- und ASN-Funktionen geschlossener Sequentialtests bei Binomialverteilung, Computing 8 (1971), S. 107 ff.
- SCHINDOWSKI, Egon, SCHÖRZ, Otto, Statistische Qualitätskontrolle, Kontrollkarten und Stichprobenpläne (4. Aufl.), Berlin o.J. (1966).
- SCHMITZ, Norbert, LEHMANN, Fritz, Monte-Carlo-Methoden I, Erzeugen und Testen von Zufallszahlen, Meisenheim am Glan 1976.
- SCHNEIDERMAN, M.A., ARMITAGE, P., A Family of Closed Sequential Procedures, Biometrika 49 (1962), S. 41-56.

- SCHULTE, Elmar B., Quantitative Methoden der Urteilsge-
winnung bei Unternehmensprüfungen, Diss.
Münster 1969 (ebenfalls erschienen als Bd. 3
der Schriftenreihe des Instituts für Revi-
sionswesen der Westfälischen Wilhelms-Uni-
versität Münster, hrsg. von U. LEFFSON, Düs-
seldorf 1970).
- SHAH, D.K., PHATAK, A.G., A Simplified Form of the ASN for
a Curtailed Sampling Plan, Technometrics 14
(1972), S. 925-929.
- SMITH, T.M.F., Statistical Sampling for Accountants, London
1976.
- SPERL, Andreas, Prüfungsplanung, Bd. 12 der Schriftenreihe
des Instituts für Revisionswesen der Westfä-
lischen Wilhelms-Universität Münster, hrsg.
von U. LEFFSON, Düsseldorf 1978.
- STANGE, Kurt, Kostengünstigste Prüfpläne. Eine Übersicht
über den Stand der Entwicklung. Ablauf- und
Planungsforschung 10 (1969), S. 323-341.
- Statistical Research Group, Columbia University (SRG),
Sequential Analysis of Statistical Data:
Applications. Prepared for the Applied Mathe-
matics Panel, National Defense Research
Committee, Office of Scientific Research and
Development. SRG Report 255 (revised), AMP
Report 30.2R (revised), New York, London 1946,
S. 2.01 ff.
- DIESELBE, Sampling Inspection; Principles, Procedures and
Tables for Single, Double and Sequential
Sampling in Acceptance Inspection and Quality
Control Based on Percent Defective, ed. by
H.A. FREEMAN, M. FRIEDMAN, F. MOSTELLER, W.A.
WALLIS, New York, London 1948.
- STEVENSON, William J., Business Statistics, Concepts and
Applications, New York, Hagerstown, San
Francisco, London 1978.
- STROBEL, Wilhelm, Die Bedeutung mathematischer Stichproben-
analysen für die Praxis von Jahresabschluß-
prüfungen, WpG 26 (1973), S. 485-491.
- UHLMANN, Werner, Statistische Qualitätskontrolle. Eine
Einführung. Stuttgart 1966.
- DERSELBE, Vergleich der hypergeometrischen mit der Binomial-
Verteilung, Metrika 10 (1966), S. 145-158.
- DERSELBE, Kostenoptimale Prüfpläne, Tabellen, Praxis und
Theorie eines Verfahrens der statistischen
Qualitätskontrolle, Würzburg, Wien 1969.

- United States Department of Defense (Ed.), Military Standard 105A, Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes, Washington D.C. 1950.
- Dasselbe, Military Standard 105D, Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes. Washington D.C. 1963.
- VANASSE, Robert W., Statistical Sampling for Auditing and Accounting Decisions: A Simulation (2nd ed.), New York, St. Louis, San Francisco usw. 1976.
- VANCE, Laurence L., NETER, John, Statistical Sampling for Auditors and Accountants. New York 1956.
- VOGT, H., Vergleich zweier Operationscharakteristiken. Metrika 20 (1973), S. 114-121.
- WAGNER, Gustav, Folgetest für die Abnahmeprüfung von Mengen mit großen und kleinen Stückzahlen. Mitteilungsblatt für mathematische Statistik 5 (1953), S. 89-102c.
- WALD, Abraham, Sequential Analysis (7th printing), New York, London, Sydney 1965.
- WEBER, Erna, Grundriß der Biologischen Statistik (7., überarbeitete Aufl.), Stuttgart 1972.
- WETHERILL, G. Barrie, Sequential Methods in Statistics (2nd ed.), London, New York 1975.
- WETHERILL, G.B., CHIU, W.K., A Review of Acceptance Sampling Schemes with Emphasis on the Economic Aspect. International Statistical Review 43 (1975), S. 191-209.
- WETZEL, Wolfgang, Statistische Grundausbildung für Wirtschaftswissenschaftler. Band II: Schließende Statistik. Berlin, New York 1973.
- WETZEL, W., JÖHNK, Max-Detlev, NAEVE, Peter, Statistische Tabellen, Berlin 1967.
- WIJSMAN, R.A., Exponentially Bounded Stopping Time of Sequential Probability Ratio Tests for Composite Hypotheses, AMS 42 (1971), S. 1859-1869.
- WILKS, Samuel S., Mathematical Statistics (2nd printing with corrections), New York, London 1963.
- WONNACOTT, Thomas H., WONNACOTT, Ronald J., Introductory Statistics for Business and Economics (2nd ed.), Santa Barbara, New York, London, Sydney, Toronto 1977.

- WUCHERER, H., Grenzen-Berechnung "nach Maß" bei Folgestichproben hilft Prüfkosten senken, QZ 19 (1974), S. 201-203.
- WYSOCKI, Klaus von, Zur Verwendung von Nomogrammen bei der Auswertung von Zufallsstichproben, WPg 28 (1975), S. 484-499 (wiederabgedruckt in: WYSOCKI, HAGEST, a.a.O., S. 91-112).
- DERSELBE, Grundlagen des betriebswirtschaftlichen Prüfungswesens (2., vollständig neubearbeitete Aufl.), München 1977.
- WYSOCKI, Klaus von, HAGEST, Joachim (Hrsg.), Praxis des Prüfungswesens, München 1976.
- YAMANE, Taro, Statistik. Ein einführendes Lehrbuch (Dt. Übersetzung von H.-J. ZUBROD), Band 2, Frankfurt/M. 1976.

Lebenslauf

Andreas Lamers	Norbertstr. 19, 4400 Münster
geboren am:	24. Mai 1952 in Kirchhellen (jetzt: Bottrop-Kirchhellen)
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Eltern:	Josef Lamers, Baudirektor und Therese Lamers, geb. Inkmann
Schulbesuch:	1958-1962 Kath. Volksschule St. Jo- hannes in Kirchhellen 1962-1968 Städt. Neusprachl. Gymnasium in Gladbeck (math. Zweig) 1968-1970 Math.-Naturwissenschaftl. Gymnasium in Gladbeck
Reifeprüfung:	Juni 1970 in Gladbeck
Studium:	1970-1974 Studium der Betriebswirt- schaftslehre an der Univer- sität Münster
Diplomprüfung:	Oktober 1974 in Münster
Berufsweg:	1974-1977 wissenschaftliche Hilfskraft im Fachbereich Wirtschafts- wissenschaften der Universität Münster 1977-1980 Verwalter der Stelle eines wissenschaftlichen Assisten- ten am Institut für Ökonomie- trie und Wirtschaftsstatistik der Universität Münster seit 1980 wissenschaftlicher Angestell- ter am Institut für Ökonomie- trie und Wirtschaftsstatistik der Universität Münster

